現代のブール代数

S. コッペルベルク 著

廣瀬 健 監訳／渕野 昌 訳

共立出版株式会社

序　　文

本書は，私が 1982 年から 1983 年にかけてベルリン自由大学で行なった講義に基づいている．

ここでは，集合論的，組合せ論的結果，ブール代数のいくつかの特別なクラスといった，最近，特に注目を浴びてきている研究分野に対して，スペースを割くことを心がけた．しかし，深く掘下げた議論がなされるのはバルツァー・フラネックの定理（定理 8.1.1），およびマハラムの定理（定理 9.3.1）に関する個所のみである．後者の証明は，ヴラディミロフの本 [12] での記述にしたがった．

“すべてのブール代数は，ある集合ブール代数と同型である”（定理 2.2.7），“すべての完備ブール代数は，ある半順序集合の正則開集合代数と同型である”（命題 2.4.4）という，ブール代数の構造に対する一次近似としての展望を与える2つの定理は，できるだけ早い段階で証明される．この2番目の定理は，集合論において，集合論のブール代数値モデルと強制法とを結びつける役割りを果たす．

普通には詳細に議論される，無限分配則とそれに関連した表現可能性，および連鎖条件は，本書では比較的簡単に扱われている．前者に関してはシコルスキーの本 [11] を，後者に関しては第7章の文献で挙げたコンフォート・ネグレポンティスの本を参照されたい．ブール代数の測度論，数理論理学および集合論への応用も，本書では扱われていない．完備ブール代数とコーエンの強制法の関係については，イェヒの本 [1] で補ったらよいであろう．この分野とケトーネンの可算ブール代数に関する深遠な結果は，いずれにしても，本書の枠内には納まりきらなかったと思う．

読者の第一目標は，定理 2.2.7 と命題 2.4.4 の2つの表現定理であろう．

2.2 節は，1.2 節と 1.3 節で説明される，ごく一般的な知識を除けば，2.1 節から直接読み進むことができる．2.4 節では，これに加えて 1.2 節と 1.3 節での知識が必要となる．第 3 章で導入される手法は，いくつかの具体的な応用と例を除けば，それ以後，常に用いられる．第 4 章では，ストーンの双対定理の主要な部分が述べられる．これ以後の各章では，この双対定理を十分に理解していることを前提としている．第 1 章から第 4 章までの内容が，ブール代数の理論の基礎となる．その他の重要な基本事項は，第 6 章，7.1 節と 7.2 節のユニバーサル・アルジェブラ的な部分，および，7.3 節と 9.1 節で与えられる．最後に，第 5 章，第 8 章および 9.2 節から 9.4 節までにおいて，いくつかの特別なブール代数のクラスが考察される．ここでの結果は，より具体的になり，他の章より掘下げて論じてあるが，特論的性格を持つものであって，常に用いられる基礎的な知識に属するものではない．全体として，第 1 章から第 5 章までは，任意の（必ずしも完備でない）ブール代数が扱われ，第 6 章から第 9 章では，主に，完備ブール代数に焦点があてられている．

ほとんどすべての節には，演習問題が添えられている．これらの多くは，後の章のための準備練習，または本文の内容の補充の役割りを果たしている．

本書は，特に後のほうの章では，集合論と位相空間論の知識を多少仮定している．集合論的な表記法は，標準的なものが用いられている．$f[X]$ と $f^{-1}[X]$ はそれぞれ，集合 X の写像 f による像，または逆像を表わす．関数 $f:A\to B$ は，しばしば，"$f(a)=\cdots$" という定義でなく "$a\mapsto b=\cdots$" という対応規則によって定義されている．証明の終り，または命題の区切りは，▌という記号で示されている．

本書の翻訳者の渕野　昌氏には，本文の編集の段階での打合せに何度も付合っていただいた．多くの演習問題の略解も渕野氏の作成による．また，監訳者の廣瀬　健氏，共立出版（株）の小山　透氏，南條光章氏にも，渕野氏を通じていろいろとお世話になった．ここに感謝の意を表します．

1986 年 2 月

S．コッペルベルク

監訳者まえがき

序文に著者自身が書かれているように，本書は，S. Koppelberg 教授がベルリン自由大学で講義された内容をもとに，これを整理・加筆されて成ったものである．

たまたま，私の研究室出身の訳者・渕野　昌氏が，同大学の助手（Wissenschaftlicher Mitarbeiter）として Koppelberg 教授の演習・その他を担当しており，同氏が日本に帰国した際，Koppelberg 教授の講義内容の話をしたのが，Koppelberg 教授に講義のまとめをお願いし，本書が誕生するきっかけとなったのである．

したがって，本書はヨーロッパにおいても出版される計画があるとのことであるが，日本語版が最初に出版されることになったわけである．

目次を一瞥すれば分かるように，本書は“現代ブール代数”の本格的な解説書であり，教科書である．

数学では，さまざまな理論の交叉する部分に興味深く面白い分野が多い．

ブール代数も，集合論，組合せ論，数理論理学，代数学から解析学までが多彩に交叉する興味深い分野である．

しかし，このブール代数の多彩な世界を，ここまで本格的かつ丁寧に解説した本は，これまで見あたらなかったように思う．

本書には，かなり高級な結果までがもられており，さらにその先への指針まで述べられているが，これを読むのに，特に予備知識がなくてはならないというわけではない．大学理工系の２，３年の学生ならば誰でも読み始めることができよう．もちろん，集合論や位相空間論その他の知識が多少仮定されている部分もあるが，そのような場合には，その場で巻末の参考文献に掲げられているような本の，必要な部分だけを読んで，再び本書に戻ればよいのである．

そのような読み方は，早く興味深い世界に接する一つの方法でもあろうと思う.

前述したように，本訳書は，訳書とはいっても，現時点でその原書が存在していない. そのような状況もあって，各章・各節に演習問題をつけて頂くよう Koppelberg 教授にお願いした. 訳者の渕野氏は演習問題を Koppelberg 教授と共に作成した上，それに解答をつけた.

このような経緯もあって，渕野氏がはたした役割は，たんなる訳者以上のものであった.

そのおかげで，本書は日本における大学の状況をも考慮したものとなったし，参考文献も Koppelberg 教授が挙げられたものに加えて，日本で出版されている本をも掲げることになった.

本格的なブール代数の解説書が，たんなる翻訳書としてでなく出版できることを嬉しく思う.

1986 年 3 月

廣瀬　健

目　　次

第1章　半順序集合と束

ブール代数とは，代数的構造（A，$+$，$\cdot$，$-$，0，1）で，1.3 に述べる公理（**V 1**）～（**V 3**），（**D**），（**E**），（**N**），および（**C**）を満たすものである．われわれは，第2章以後この立場から考察を進めるが，この公理系は，一見，長くて複雑に見えるので，まず別の定式化により，特別な束としてブール代数を導入する．ここに，束とは，ある性質を満たす半順序集合のことである．最初に，後で必要となる半順序集合，および，束のいくつかの基本的な性質について考察しよう．

1.1　半　順　序　集　合

半順序集合とは，集合 P と，**反射律**，**反対称律**，**推移律**を満たす P 上の2項関係$\leqslant$の組（P, $\leqslant$）のことである．つまり，任意の P の元 x, y, z に対し，

$x \leqslant x$,

$x \leqslant y$ かつ $y \leqslant x$　ならば $x = y$,

$x \leqslant y$ かつ $y \leqslant z$　ならば $x \leqslant z$

が常に成立する．“$x \leqslant y$”は，“x は y より小さいか等しい”と読む．Pが空集合であることも許すことにする．混乱の恐れのないときは，（P, $\leqslant$）を単に P で表わす．

例 1.1.1　1）P を集合の族としよう．$x, y \in P$ に対し，$x \leqslant y$ を x が y の部分集合であること（つまり，$x \subseteq y$）と定義する．このとき，（P, $\leqslant$）は半順序集合である．特に，任意の集合 X の巾集合を $P(X)$ で表わすとき，（$P(X)$, $\subseteq$）は半順序集合になる．

2)（$P, \leqslant$）は半順序集合で Q を P の部分集合としよう．このとき，$\lessdot$を$\leqslant$の Q への制限，つまり $\leqslant$ を Q 上で考えたものとすれば，（$Q, \lessdot$）は半順序集合となる．（$Q, \lessdot$）のことを（$Q, \leqslant$）または（$Q, \leqslant \upharpoonright Q$）で表わすことにする．（$Q, \leqslant$）は（$P, \leqslant$）の**部分半順序集合**と呼ばれる．

半順序集合 P の元 x, y について，$y \leqslant x$ を $x \geqslant y$，（$x \leqslant y$ かつ $x \neq y$）を $x<y$，$y<x$ を $x>y$ とも書くことにする．半順序集合 P の元 a は，すべての $x \in P$ に対し $x \leqslant a$（$a \leqslant x$）となるとき，P の**最大元**（**最小元**）と呼ばれる．a と a' が共に P の最大元であるときには，$a' \leqslant a$ と $a \leqslant a'$ が成立するから $a=a'$ である．最小元についても同様である．

P が，常に最大元または最小元を持つとは限らない．たとえば，X を無限集合として P を X の有限部分集合の全体の集合とするとき，（$P, \subseteq$）は最小元 $\varnothing$(空集合）を持つが，最大元は持たない．P の最大元（最小元）が存在するときには，それを 1_P あるいは 1 で（0_P あるいは 0 で）表わす．

M を P の部分集合としよう．P の元 s は，すべての $m \in M$ に対し $m \leqslant s$（$s \leqslant m$）を満たすとき，M の**上界**（**下界**）と呼ばれ，このことを $M \leqslant s$（$s \leqslant M$）で表わす．M は，全く上界を持たないこともあるし，反対に無限個の上界を持つこともありうる．これは，下界についても同様である．

s は M の最小の上界（最大の下界）であるとき，M の**上限**（**下限**）と呼ばれ，これを $s=\sum M$（$s=\prod M$）で表わす．$s=\sup M, s=\bigcup M$（$s=\inf M$，$s=\bigcap M$）などの表記法も用いられ，$\sum M$（$\prod M$）は M の和（積）とも呼ばれる．

s が P での上限（下限）であることを示すために，$s=\sum^P M$（$s=\prod^P M$）という書き方が用いられることもある．M の元が添数集合によって $M=\{m_i \mid i \in I\}$ というように表わされているときには，$s=\sum_{i \in I} m_i$（$s=\prod_{i \in I} m_i$）とも書く．

$s=\sum M$ は，“s は M の上界で，M の上界の全体の作る集合の最小元である”ということを意味する．特に $s=\sum M$ ならば，M のすべての上界 s' に対し $s \leqslant s'$ が成立し，このことから，s は（$P, \leqslant$）の部分順序集合（$S, \leqslant$），$S=\{s, \in P \mid s'$ は M の上界$\}$ の最小元となり，存在すれば，一意に決まることが分かる．

例 1.1.2　半順序集合（$P(N), \subseteq$）とその部分順序集合（$R, \subseteq$）と（$Q, \subseteq$）

を考えてみよう．ここに R は $\boldsymbol{N}$ の有限部分集合の全体とし，Q は $\boldsymbol{N}$ の部分集合 e で e または $\boldsymbol{N}\backslash e$ が有限になるもの全体の集合とする．さらに M を $\boldsymbol{N}$ の有限部分集合で偶数のみからなるものの全体の作る集合とする．$M\subseteq R\subseteq Q\subseteq P(\boldsymbol{N})$ である．M は $(R,\subseteq)$ では上界を持たないが，$(Q,\subseteq)$ では無限個の上界を持つ．$(P(\boldsymbol{N}),\subseteq)$ では偶数全体の集合が N の上限になっている． ▮

t と t' を半順序集合 P の中で記号 $\sum$, $\prod$, 1, 0 を用いて表わされた項とするとき，$t\simeq t'$ で，“t が P で定義されるとき，かつ，そのときに限り t' が P で定義され，そのときには，$t=t'$ が成り立つ”ということを表わすことにする．この記法により，任意の半順序集合 P で $\sum P\simeq 1$, $\prod P\simeq 0$, $\sum\varnothing\simeq 0$, $\prod\varnothing\simeq 1$ が成り立つ．$x\in P$ に対し $M=\{x\}$ とすると $\sum M=x$ となる．$x,y\in P$ に対し $M=\{x,y\}$ として，$x\leqslant y$, $\sum M=y$, $\prod M=x$ はすべて同値になる．

1.1.1 補題 各 $i\in I$ に対し M_i を半順序集合 P の部分集合とし，$s_i=\sum M_i$ $(p_i=\prod M_i)$ とする．このとき $M=\bigcup_{i\in I}M_i$ なら $\sum M\simeq\sum_{i\in I}s_i$ $(\prod M\simeq\prod_{i\in I}p_i)$ が成立する．

証明 任意の $x\in P$ に対し

$$\begin{aligned} M\leqslant x &\iff \text{すべての } i\in I \text{ に対し } M_i\leqslant x \\ &\iff \text{すべての } i\in I \text{ に対し } s_i\leqslant x \\ &\iff \{s_i \mid i\in I\}\leqslant x \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，M と $\{s_i \mid i\in I\}$ は同じ上界の集合を持つ．特に，M が最小の上界を持つときには，それが $\{s_i \mid i\in I\}$ の最小の上界になり，その逆も成り立つ．したがって，$\sum M\simeq\sum_{i\in I}s_i$. $\prod M\simeq\prod_{i\in I}p_i$ についても同様． ▮

半順序集合 P の元 x,y は $x\leqslant y$ または $y\leqslant x$ が成り立つときに**比較可能**であるといわれる．P の部分集合 K は，K のすべての 2 つの元が比較可能なとき，**連鎖**と呼ばれる．P 自身が連鎖のとき，P を**全順序集合**または**線形順序集合**という．P の元 m は，$m<x$ $(m>x)$ となる $x\in P$ が存在しないとき，P の**極大元**（**極小元**）と呼ばれる．P は極大元を全く持たない場合もあるし，ただ 1 つの，あるいは複数の極大元を持つ場合もある．P が最大元（最

小元）a を持つ場合には，a は，P のただ1つの極大元（極小元）となる．

以下に述べる**ツォルンの補題**は半順序集合に関する命題で，現代数学では証明原理としてよく用いられる．この補題の証明は，たいていの集合論の教科書に載っているが，そこでは選択公理からツォルンの補題が導かれる．さらに，この2つの原理が同値であることもたいていの教科書で示されている．しかしながら，このことの証明は，全く集合論的な性格を持つものなので，ここでは省略する．

1.1.2 ツォルンの補題 （$P, \leqslant$）を半順序集合ですべての連鎖 $K \subseteq P$ が上界（下界）を持つものとする．このとき P は極大元（極小元）を持つ． ▮

読者は既に気がついていることと思うが，この節で定義されたすべての概念は対になっていて，1つの概念 b に対し，そこに現われる$\leqslant$をすべて$\geqslant$で置き換えることによって得られる**双対**な概念 b^d が括弧の中に示されていた．たとえば，最大元—最小元，極大元—極小元，上限—下限などは，互いに双対な概念である．"x と y とは比較可能"，"K は連鎖である" などのいくつかの概念は自分自身と双対（自己双対）になっている．また，半順序集合に関する命題φに対し，φ に現われるすべての概念 b をその双対概念 b^d で置き換えることによって得られる双対命題 φ^d があって，その証明は，φ の証明と全く同様であるため省略されていた．φ を証明することにより実質的には φ^d も証明しているという事実は，次の定理によって示される．

1.1.3 定理（半順序集合における双対原理） φ をすべての半順序集合で成り立つ命題とするとき，その双対命題もすべての半順序集合で成り立つ．

証明 ここでは証明のスケッチのみを示す．証明を厳密に行なうには，数理論理学の枠組みが必要となる．半順序集合（$P, \leqslant$）に対し，双対な半順序集合 $(P, \leqslant)^d$ を（$P, \geqslant$）で定義する．つまり，$(P, \leqslant)^d$ は集合 P と $x \leqslant^d y \Longleftrightarrow y \leqslant x$ で定義される半順序 $\leqslant^d$ の組とする．$(P, \leqslant)^d$ がまた半順序集合となることは容易に確かめられる（実際，半順序集合の公理系は自己双対な形をしている）．命題 φ が（$P, \leqslant$）で成り立つこととその双対命題 φ^d が $(P, \leqslant)^d$ で成り立つことは同値となる．また，$(P, \leqslant)^{dd} = (P, \leqslant)$ が成り立つ．さて φ をすべての半順序集合で成り立つ命題として，φ^d もすべての半順序集合で成り立つ

ことを示そう．任意の半順序集合 $(P,\leqslant)$ に対し，仮定により φ は $(P,\leqslant)^d$ で成り立つ．したがって，φ^d は $(P,\leqslant)^{dd}=(P,\leqslant)$ で成り立っている． ▌

1.1 の演習問題

$(Q,\leqslant)$ は，$\leqslant$が反射律と推移律を満たす Q 上の２項関係であるとき，**擬順序**であるという．

1.1.1 以下を示せ．

a） $x\sim y \Longleftrightarrow x\leqslant y$ かつ $y\leqslant x$ により定義される$\sim$は Q 上の同値関係である．

b） $x\in Q$ に対し $\bar{x}=\{y\in Q \mid x\sim y\}$ とし，$P=\{\bar{x} \mid x\in Q\}$ とする．また，$x,y\in Q$ に対し $\bar{x}\leqslant\bar{y} \Longleftrightarrow x\leqslant y$ と定義する．このとき，$(P,\leqslant)$ は半順序集合となる．

２つの半順序集合 $(P,\leqslant)$ と $(Q,\leqslant)$ は，全単射 $f: P\to Q$ ですべての $x,y\in P$ に対し，$x\leqslant y \Longleftrightarrow f(x)\leqslant f(y)$ となるようなものが存在するとき，**同型**であるという．

1.1.2 任意の半順序集合 $(P,\leqslant)$ に対し集合 X と $Q\subseteq P(X)$ で $(P,\leqslant)$ と $(Q,\subseteq)$ が同型になるようなものが存在することを示せ．

$(P,\leqslant)$ を半順序集合とする．$x,y\in P$ は，$x\leqslant y$または $y\leqslant x$ が成り立つとき，**比較可能**であるという．x,y は比較可能でないとき，**比較不可能**であるという．$M\subseteq P$ は，すべての異なる $x,y\in M$ が比較不可能であるとき，**反鎖**と呼ばれる．

1.1.3 Pの任意の連鎖（反鎖）に対し，それを含む包含関係に関して極大な連鎖（反鎖）が存在することを，ツォルンの補題を用いて示せ．

1.1.4 半順序集合 $(P,\leqslant)$ のすべての連鎖，および反鎖が有限なら，P 自身も有限となることを示せ．

1.2 順 序 位 相

この節では，半順序集合 $(P,\leqslant)$ に順序位相と呼ばれる位相構造を入れることについて考察する．この位相の定義とその位相的な性質それ自身は，位相空間論の立場から見ると自明でつまらないものだが，2.4 では，この位相により，完備ブール代数の典型的な例が構成されることが示される．

$(P,\leqslant)$ を半順序集合とし，u を P の部分集合としよう．すべての $x\in u$ と $y\in P$ に対し，$y\leqslant x$ なら y も u の元となるとき u を P の開集合と呼ぼう．明らかに，空集合と P 自身は P の開集合であり，u と v とが P の開集合なら $u\cap v$ も P の開集合となる．また添数集合 I の各元 i に対し u_i を P の開集合とするとき，$\bigcup_{i\in I} u_i$ も開集合となる．したがって P の開集合全体の作る集合 $\mathcal{O}$ は P 上の位相となり，$(P,\mathcal{O})$ は位相空間となる．$\mathcal{O}$ は P 上

の**順序位相**と呼ばれる．この位相空間は，ちょっと変わった，あるいは，位相空間論の立場からは，あまり面白くない性質を持っている．たとえば，Pの任意の開集合族の共通部分はまた開集合になる．またPは，一般には，T_0：“任意の2つの異なる元に対し一方を含み他方を含まないような開集合が存在する”以外の分理公理を満たさない．P の元 x に対し $b_x=\{p\in P \mid p\leqslant x\}$ は x を含む開集合だから，x の開近傍である．更に，b_x が x の $(P,\mathscr{O})$ での最小の近傍となることも分かる．$x\leqslant y$ と $b_x\subseteq b_y$ は同値になり，$\{b_x \mid x\in P\}$ は位相空間 $(P,\mathscr{O})$ の開基となる．定義から P の部分集合 a は，“すべての $x\in a$ と $y\in P$ に対し $y\leqslant x$ なら $y\in a$”が成り立つとき，かつ，そのときに限り閉集合となる．P の任意の部分集合 c に対し

$$c^i=\{p\in P \mid b_p\subseteq c\}$$
$$=\{p\in P \mid x\leqslant p \text{ なら } x\in c\},$$

また

$$c^h=\{p\in P \mid x\leqslant p \text{ となる } x\in c \text{ が存在する}\}$$

とすれば，c^i は上の定義により c に含まれる最大の開集合（つまり，c の開核）となり，c^h は c を含む最小の閉集合（つまり，c の閉包）となる．

1.2 の演習問題

1.2.1　$(P,\leqslant)$ を半順序集合として，$\mathscr{O}$ をその半順序位相とする．このとき，以下の命題が同値になることを示せ：

a）$(P,\mathscr{O})$ は離散位相空間である

b）$(P,\mathscr{O})$ はハウスドルフ位相空間である

c）P のすべての開集合は閉集合でもある

d）$(P,\leqslant)$ は離散的である．つまり，すべての $x,y\in P$ に対し，$x\leqslant y$ なら $x=y$ が成り立つ．

1.2.2　擬順序集合 $(Q,\leqslant)$ に対し，順序位相 $\mathscr{O}_\leqslant$ を 1.2 でと同様に定義する．$(Q,\leqslant)$ は，$(Q,\mathscr{O}_\leqslant)$ が T_0- 空間になるとき，かつ，そのときに限り，半順序集合になることを示せ．

1.2.3　$(X,\mathscr{O})$ を位相空間とする．このとき，X 上の関係 $\leqslant$ で $(X,\leqslant)$ が擬順序となり，$\mathscr{O}$ が X 上の $\leqslant$ に関する順序位相となるようなものが存在するとき，かつ，そのときに限り，$\mathscr{O}$ は任意の部分集合の共通部分に関し閉じている（つまり，任意の $M\subseteq\mathscr{O}$ に対し $\bigcap M\in\mathscr{O}$ となる）．これを示せ．

1.3　束

束とは，半順序集合 $(L, \leqslant)$ で任意の2元 x, y に対し集合 $\{x, y\}$ の上限および下限の存在するもののことをいう．これらを，それぞれ $x+y$ および $x\cdot y$ で表わすことにしよう．半順序集合が束であるための2条件，"任意の2元は上限を持つ" および "任意の2元は下限を持つ" は互いに双対になっている．したがって，束についても定理 1.1.3 と同様の双対原理が成立することが分かる．

1.3.1 定理　(束に関する双対原理)　φ をすべての束で成り立つ命題とするとき，その双対命題 φ^d もすべての束で成り立つ．　▮

この双対原理により，以下では，特別な場合を除き，双対な2つの命題のうち一方のみを証明することにする．

1.3.2 補題　束の任意の空でない有限部分集合は，上限および下限を持つ．

証明　$M=\{x_1, \cdots, x_n\}$ を L の有限部分集合で $n\geqslant 1$ としよう．n に関する帰納法により，$\sum M$ が存在することを示す．$n=1$ のときには $\sum M=x_1$ となるからよい．$n>1$ とし，帰納法の仮定により $s=\sum\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ が存在するから，補題 1.1.1 により $s+x_n=s+\sum\{x_n\}=\sum\{x_1, \cdots, x_y\}=\sum M$ となり，$\sum M$ は存在する．　▮

以下の例は，この節で扱われる概念を理解するときの助けとなるだろう．

例 1.3.1　X を任意の集合とする．このとき，$(P(X), \subseteq)$ は束となり，$x, y\in P(X)$ に対し，$x+y=x\cup y$，$x\cdot y=x\cap y$ が成り立つ．更に，$M\subseteq P(X)$ に対し，$\sum M=\bigcup M$，$\prod M=\bigcap M$ が成り立つ．　▮

例 1.3.2　X を無限集合とし，L を X の有限部分集合全体の集合とする．このとき，$(L, \subseteq)$ は束となり，$x, y\in L$ に対し $x+y=x\cup y$，$x\cdot y=x\cap y$ となっている．L の空でない部分集合 M に対し $\prod M=\bigcap M$ が成立するが，$\prod\emptyset$ は存在しない．また，L の無限部分集合 M に対しては，$\sum M$ は存在しない．　▮

例 1.3.3　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{O}$ は X の開集合の全体の集合であ

る．このとき，$(\mathcal{O}, \subseteq)$ は束となり，$x, y \in \mathcal{O}$ に対し，$x+y=x \cup y$，$x \cdot y = x \cap y$ となる．

$M \subseteq O$ に対し $\sum M = \bigcup M$，$\prod M = (\bigcap M)^i$ $(\bigcap M$ の開核$)$ である． ▮

例 1.3.4 K を体とし，X を K 上のベクトル空間とする．L を X の部分空間全体の集合とする．このとき，$(L, \subseteq)$ は束となる．$M \subseteq L$ に対し，$\prod M = \bigcap M$，また $\sum M$ は $\bigcup M$ によって生成された部分空間になる． ▮

束 $(L, \leqslant)$ のすべての部分集合が上限と下限を持つとき，$(L, \leqslant)$ は**完備束**と呼ばれる．例 1.3.2 が示すように，すべての束が完備束であるわけではない．特に，空集合が上限と下限を持つとは限らない．上の例では，束の半順序はすべて集合の包含関係で定義されている．しかし，その場合でも，例 1.3.4 の示すように，有限集合の上限と下限が集合論的な上限と下限，つまり和集合と共通部分になるとは限らない．また，例 1.3.3 の示すように，有限な $M \subseteq L$ に対して，$\sum M$ が和集合，$\prod M$ が共通部分となる場合でも，同じことが有限でない M に対して成り立つとは限らない．

すべての束 $(L, \leqslant)$ に対し，2項演算 $+$ および $\cdot$ が定義できる．以下で，これによって得られる代数的構造 $(L, +, \cdot)$ が演算規則 **(V1)**〜**(V3)** を満たすことを示す．逆に，**(V1)**〜**(V3)** を満たす代数的構造 $(\mathrm{V}, \oplus, \odot)$ から V 上の半順序 $\leqslant$ を $(\mathrm{V}, \leqslant)$ が束になるように定義できる．更に，束と **(V1)**〜**(V3)** を満たす代数的構造の間の上記の2つの対応は互いに逆の対応となっている．

以下の計算および後の章では，“$\cdot$ は $+$ より結合力が強い”という原則に従って，積の外側の括弧は特別の場合を除き省略することにする．

1.3.3 補題 $(L, \leqslant)$ を束とする．$x+y$ で $\{x, y\}$ の上限を，$x \cdot y$ で $\{x, y\}$ の下限を表わすことにする．このとき，すべての $x, y, z \in L$ に対し以下の**可換法則**，**結合法則**，**吸収法則**が成り立つ：

(V1) $x+y=y+x$, $\qquad x \cdot y = y \cdot x$

(V2) $x+(y+z)=(x+y)+z$, $\qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(V3) $x+x \cdot y = x$, $\qquad x \cdot (x+y) = x$

証明

(V1)：$\{x,y\}$ と $\{y,x\}$ は同一の集合だから，$x+y=\sum\{x,y\}=\sum\{y,x\}=y+x$ となる．

(V2)：補題 1.1.1 により

$$x+(y+z)=\sum\{x\}+\sum\{y,z\}$$
$$=\sum\{x,y,z\}$$
$$=\sum\{x,y\}+\sum\{z\}$$
$$=(x+y)+z$$

(V3)：$x\cdot y\leqslant x$ だから補題 1.1.1 の前で述べた注意により，$x+x\cdot y=x$ が成り立つ．　▮

1.3.4 補題　$\oplus$ と $\odot$ を集合 V 上の 2 項演算とし，代数的構造 $(\mathrm{V},\oplus,\odot)$ は **(V1)**〜**(V3)** を満たすものとする．このとき，$x\oplus x=x\odot x=x$ が成り立ち，$x,y\in\mathrm{V}$ に対し $x\oplus y=x$ と $x\odot y=y$ は同値になる．更に，$x\leqslant y$ を $x\odot y=x$ によって定義すると $(\mathrm{V},\leqslant)$ は束になる．x と y の $(\mathrm{V},\leqslant)$ での上限は $x\oplus y$ になり，下限は，$x\odot y$ になる．

証明　まず，**(V3)** を 2 回用いることにより，$x\oplus x=x\oplus x\cdot(x\oplus x)=x$ となる．**(V1)** **(V3)** により，$x\odot y=x$ から，$x\oplus y=x\odot y\oplus y=y$ が出る．同様に，$x\oplus y=y$ から $x\odot y=x\odot(x\oplus y)=x$ となる．次に，上で定義された 2 項関係 $\leqslant$ が V 上の半順序になることを確かめよう．$x,y,z\in\mathrm{V}$ とする．$x\odot x=x$ だから，$x\leqslant x$．$x\leqslant y$ かつ $y\leqslant z$ なら，$x\odot y=x$ かつ $y\odot z=y$ だから，$x\odot z=(x\odot y)\odot z=x\odot(y\odot z)=x\odot y=x$ となり，$x\leqslant z$ がいえる．$x\leqslant y$ かつ $y\leqslant x$ なら，$x=x\odot y=y\odot x=y$ となる．最後に，$x,y\in\mathrm{V}$ に対し，$x\oplus y$ が x と y の上限であることを示そう．$x\odot(x\oplus y)=x$ だから，$x\leqslant x\oplus y$．同様に $y\leqslant x\oplus y$ もいえる．z を x と y の上界とすると，$x\leqslant z$ から $x\oplus z=z$ であり，同様に $y\oplus z=z$ である．したがって，$(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)=x\oplus z=z$ となり，$x\oplus y\leqslant z$ がいえて，$x\oplus y$ は x と y の最小の上界であることが分かる．　▮

補題 1.3.4 により，**(V1)**〜**(V3)** を満たす代数的構造 $(\mathrm{V},\oplus,\cdot)$ に，束

(V, ⩽) が対応する．補題 1.3.3 によってこの束から得られる代数的構造は，補題 1.3.4 によりふたたび $(V, \oplus, \odot)$ となる．反対に，束 (V, ⩽) から出発して，補題 1.3.3 により，それに対応する代数的構造 (V, +, ・) を考え，補題 1.3.4 でのように，$x \lessdot y$ を $x \cdot y = x$ と定義することにより，これに対応する束 (V, ⋞) を作ると，$x \leqslant y$，$x \cdot y = x$ および，$x \subseteq y$ は同値になるから，V 上の半順序 ⩽ と ⋞ は一致する．このことから，以下では，束といったときには，主に，束の公理 **(V1)**〜**(V3)** を満たす代数的構造 (V, +, ・) を考えることにする．

1.3.5 補題　(V, +, ・) を束とし，x, y, x', y' を $x \leqslant x'$，$y \leqslant y'$ を満たす V の元とする．このとき，

$$x + y \leqslant x' + y',$$
$$x \cdot y \leqslant x' \cdot y'$$

が成り立つ．

証明　$x \leqslant x' \leqslant x' + y'$ また $y \leqslant y' \leqslant x' + y'$ であるから，$x' + y'$ は x と y の上界になっている．したがって，$x + y \leqslant x' + y'$ が成り立つ．　▮

互いに双対な一組の公理，

$$\textbf{(D)}\quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z,\quad x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$$

が束 (V, +, ・) のすべての元 x, y, z に対し成り立つとき，(V, +, ・) は**分配束**であるという．有限個の元の上限と下限が集合論的に，つまり，和集合，共通部分として得られるような束は，明らかに分配束となる．例 1.3.4 の束は分配束ではない．たとえば，K を実数体 $\boldsymbol{R}$ とし，X を $\boldsymbol{R}$–ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$ として，U, V, W をそれぞれ (1, 0)，(0, 1)，(1, 1) によって張られた 1 次元部分空間とするとき，$V + W = \boldsymbol{R}^2$ だから，$U \cdot (V + W) = U$ であるが，$U \cdot V = U \cdot W = \{0\}$ だから，$(U \cdot V) + (U \cdot W) = \{0\}$ となる．

1.3.6 補題　分配法則 **(D)** のどちらか片方の命題を満たす束は分配束となる．

証明　たとえば，$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ がすべての $x, y, z \in V$ に対し成り立つとしよう．このとき，$x \cdot x = x$ また $x + x \cdot y = x$ であるから，

$$(x+y) \cdot (x+z) = x \cdot x + x \cdot z + y \cdot x + y \cdot z$$

$$=x+x\cdot z+x\cdot y+y\cdot z$$
$$=x+x\cdot y+y\cdot z$$
$$=x+y\cdot z$$

となる. ▮

束（V, +, ・）が最大元1あるいは最小元0を持つという要請は，束の計算則として表現できる．たとえば，$a\in$V は，すべての $x\in$V に対し $x\leqslant a$ が成り立つときに最大元になるが，このことは $x+a=a$ がすべての $x\in$V に対し成り立つことと同値である．したがって次の公理

(E) $x\cdot 1=x$

(N) $x+0=x$

は，1が最大元，また0が最小元であるということを表現している．束（V, +, ・）が最大元1および最小元0を持つときには，（V, +, ・）の代りに代数的構造（V, +, ・, 1, 0）を考える．（V, +, ・, 1, 0）を1と0を持つ束としよう．$x, y\in$V に対し，$x+y=1$ かつ $x\cdot y=0$ が成立するとき，y は x の**補元**と呼ばれる．1と0を持つ束は，すべての元に対し，その補元が存在するとき，**相補的**であるという．一般には，1つの元はいくつもの補元を持ちうる．たとえば，例 1.3.4 で $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$ を考えるとき，任意の2つの異なる1次元線型空間は，それぞれ互いの補元となっている．しかしながら：

1.3.7 補題 最大元1と最小元0を持つ分配束（V, +, ・, 0, 1）では，すべての元は高々1つの補元しか持たない．

証明 y と z を x の V における補元としよう．$x+y=1$, $x\cdot z=0$ だから，$z=z\cdot 1=z\cdot(x+y)=z\cdot x+z\cdot y=y\cdot z$, つまり $z\leqslant y$ が成り立つ．同様に $y\leqslant z$ も示せる． ▮

最大元1と最小元0を持つ束 V の元 x が，ちょうど1つの補元を持つとき，その補元を $-x$ で表わすことにする．各元が一意に決まる補元を持つ，という要請は，次の計算則によって表現される：

(C) $x+-x=1,\quad x\cdot -x=0$

これにより，束Vは，1変数演算 $-$ を持つことになり，代数的構造（V, +,

・，－，1，0）が得られる．

1.3 の演習問題

1.3.1 $(L, \leqslant)$ と $(K, \leqslant)$ を束とし，$f: L \to K$ を演習問題 1.1.2 での意味における同型写像とする．このとき，以下を示せ：

a）L が最大元 l（または最小元 m）を持つなら，$f(l)$（または $f(m)$）は M の最大元（または最小元）になる．

b）$l \in L$ が補元 l' を持つなら，$f(l')$ は $f(l)$ の補元になる．

c）$M \subseteq L$ が L で上限 s を持つなら，$f(s)$ は $f[M]$ の K での上限になる．

1.3.2 V を，実数の単位区間 $[0, 1]$ から $[0, 1]$ への連続関数の全体の集合とする．$f, g \in V$ に対し，

$$f \leqslant g \Longleftrightarrow \text{すべての } x \in [0, 1] \text{ に対し } f(x) \leqslant g(x)$$

と定義する．このとき，$(V, \leqslant)$ は分配束となることを示せ．V は完備か？　V のどの元が補元を持つか？

有限な束は，**半順序ダイヤグラム**と呼ばれるグラフによって表現することができる：各 $x \in L$ に対応する点を，$x < y$ なら，x に対応する点が y に対応する点より下にくるように書き，$x < y$ で $x < z < y$ となる $z \in L$ が存在しないとき，x と y を線で結ぶ．

束 $(L, +, \cdot)$ は，すべての $x, y, z \in L$ に対し，

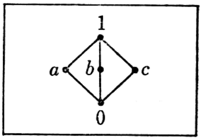
$$z \leqslant x \text{ なら } x \cdot (y + z) = x \cdot y + z$$

が成り立つとき，**モジュラ束**であるという．

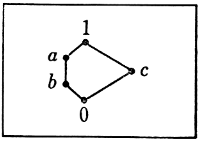
1.3.3 次のことを示せ：

a）すべての分配束はモジュラ束である．

b）右の半順序ダイヤグラムを持つ束はモジュラ束だが分配束ではない：



c）右の半順序ダイヤグラムを持つ束はモジュラ束でない：



d）G を群として，N を G の正規部分群の全体の集合とする．このとき，N は集合の包含関係によって，完備なモジュラ束となることを示せ．

1.4 完備束と閉包演算子

この節では，ある完備束から出発して新しい完備束を構成する1つの方法を考察する．2.4 で，すべての完備ブール代数が，この構成法によって得られることが示される．

束 $(L, \leqslant)$ が**完備**であるとは，すべての L の部分集合が上限および下限を持つことであったが，どちらか一方が存在すれば十分であることが次の補題から分かる：

1.4.1 補題 $(L, \leqslant)$ を半順序集合とする．L のすべての部分集合が上限を持つとき，あるいは，L のすべての部分集合が下限を持つとき，$(L, \leqslant)$ は完備束になる．

証明 すべての $S \subseteq L$ に対し，$\prod S$ が存在すると仮定する．このとき，M を L の部分集合として，$\sum M$ が存在することを示す．S を M の上界の全体の作る集合とし，$\sigma = \prod S$ と置く．σ が M の上界になることが示せれば，$\sigma = \sum M$ となることは明らかであるが，$m \in M$ に対し，$m \leqslant s$ がすべての $s \in S$ に対し成り立つから，$m \leqslant \prod S = \sigma$ となり，σ は実際に M の上界になっている．∎

$(L, \leqslant)$ を半順序集合とする．L から L への写像 $^-$ はすべての $x, y \in L$ に対し，

$$x \leqslant y \text{ なら } \bar{x} \leqslant \bar{y},$$
$$x \leqslant \bar{x},$$
$$\bar{\bar{x}} = \bar{x}$$

を満たすとき，**閉包演算子**と呼ばれる．次に閉包演算子の 2 つの例を示す．これらの例で，下の定理 1.4.2 の集合 B が何になるかを考えてほしい．

例 1.4.1 $(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする．$(P(X), \subseteq)$ は完備束だが，$x \in P(X)$ に対し $\bar{x}$ を x の閉包とすると，$^-$ は閉包演算子になる．∎

例 1.4.2 X を体 K 上のベクトル空間とする．$(P(X), \subseteq)$ は完備束だが，$x \in P(X)$ に対し，$\bar{x}$ を x の生成する部分空間とすると，$^-$ は閉包演算子となる．∎

$^-$ を $(L, \leqslant)$ 上の閉包演算子とする．$x \in L$ が $x = \bar{x}$ を満たすとき，x は $^-$ に関し**閉じている**という．

1.4.2 定理 $^-$ を完備束 $(L, \leqslant)$ 上の閉包演算子として，B を $^-$ に関して閉じている L の元の全体の集合とする．つまり，$B = \{x \in L \mid x = \bar{x}\}$ である．

このとき，B は L の半順序に関し完備束となる．さらに，$1_S=1_L$，$0_B=\bar{0}_L$ となり，すべての B の部分集合 M に対し，

（1）　$\prod^B M=\prod^L M$,

（2）　$\sum^B M=\overline{\sum^L M}$,

が成り立つ．

証明　$b\in B$ なら $b=\bar{b}$ であるから，b は $\bar{x}$ と表わせる．逆に，$b=\bar{x}$ となる $x\in L$ があれば，$\bar{b}=\bar{\bar{x}}=\bar{x}=b$ となって，$b\in B$ である．M を B の部分集合とする．$p=\prod^L M$ が B の元であることが示せれば，（1）は，このことから明らかである．このためには，$\bar{p}\leqslant p$ が示せればよい．ところが，$p\leqslant m$ が，すべての $m\in M$ に対し成り立つから，$p\leqslant\bar{m}=m$ となり，$\bar{p}\leqslant\prod^L M=p$ がいえる．補題 1.4.1 から，（1）により，$(B,\leqslant)$ が完備であることが分かる．次に（2）を示そう．$\sigma=\sum^L M$ と置く．$\bar{\sigma}$ は，B の元となるが，すべての $m\in M$ に対し $m\leqslant\sigma\leqslant\bar{\sigma}$ が成り立つから，$\bar{\sigma}$ は M の B での上界になっている．s を B での M の任意の上界とすると，s は M の L での上界にもなっているから，$\sigma=\sum^L M\leqslant s$ となり，$\bar{\sigma}\leqslant s=s$ から，$\bar{\sigma}$ が M の B での上界であることが分かる．特に，（1）と（2）および 1.1 で述べたことから，

$$1_B=\prod{}^B\varnothing=\prod{}^L\varnothing=1_L,$$

$$0_B=\sum{}^B\varnothing=\overline{\sum{}^L\varnothing}=\bar{0}_L$$

が分かる．　▮

束 L の部分集合 A は，L の束の演算 $+,\ \cdot$ に関し閉じているとき，L の**部分束**と呼ばれる．上の定理では，B は L の半順序に関して完備束になり，L での下限を作る操作に関して閉じているが，必ずしも L の部分束とはならない．たとえば，例 1.4.2 で，X の部分空間 x,y の $L=P(X)$ での上限は $x\cup y$ だが，B では等式（2）により，$x\cup y$ から生成された部分空間になる．

1.4 の演習問題

1.4.1　$(L,\leqslant)$ を完備束で，$B\subseteq L$ とする．このとき，以下の命題が同値になることを示せ：

a）B は L 上のある閉包演算子に関し閉じた元の全体である，

b）B は $\prod^{L}$ に関して閉じている，

c）すべての $l \in L$ に対して $l \leqslant b$ となる $b \in B$ のうち最小のものが存在する．

1.4.2 $(B, \leqslant)$ を半順序集合として，$(L, \leqslant)$ を完備束とする．更に，$e: B \to L$ と $p: L \to B$ を順序準同型で，$p \circ e = id_B$ となるものとする．このとき，$(B, \leqslant)$ は完備束になることを示せ（このことにより，定理 1.4.2 の $B \subseteq L$ が完備束であることの別証が得られる）．

1.4.3 $(L, +, \cdot)$ を束とする．$M \subseteq L$ に対し，

$$l(M) = \{x \in L \mid x \text{ は } M \text{ の下界}\},$$

$$u(M) = \{x \in L \mid x \text{ は } M \text{ の上界}\},$$

$$\bar{M} = l(u(M))$$

と定義する．このとき，$^{-}: P(L) \to P(L)$ は $P(L)$ 上の閉包演算子となる．B を $^{-}$ に関し閉じた $P(L)$ の元の全体とするとき，写像

$$e: L \to B ; a \mapsto \overline{\{a\}}$$

は1対1で，演算 $+$，$\cdot$ を保存する．したがって，e は L の完備束 $(B, +_B, \cdot_B)$ への埋込みになる．以上を示せ．

第2章 ブール代数

2.1 ブール代数とその基本的な性質

ブール代数は，相補的な分配束として定義される．つまり，1.3 で見たように，(V1)～(V3)，(D)，(E)，(N)，(C) を満たす代数的構造 $(A, +, \cdot, -, 1, 0)$ としてブール代数をとらえることができる．ここで，1 と 0 は A の元，$+$と$\cdot$は A 上の 2 変数演算，$-$は A 上の 1 変数演算である．簡便のために，これらの公理をもう一度まとめてみる：

(V1)	$x+y=y+x$,	$x\cdot y=y\cdot x$
(V2)	$x+(y+z)=(x+y)+z$,	$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
(V3)	$x+x\cdot y=x$,	$x\cdot(x+y)=x$
(D)	$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$,	$x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z)$
(E)	$x\cdot 1=x$	**(N)** $x+0=x$
(C)	$x\cdot -x=0$,	$x+-x=1$

束のときと同様に，この公理系は自己双対の形になっているので，ブール代数に対しても，次の双対原理が成り立つ．

2.1.1 定理(ブール代数に関する双対原理) φ をすべてのブール代数で成り立つ命題とするとき，その双対命題 φ^d もすべてのブール代数で成り立つ． ▮

もちろん，他の束と同じように，ブール代数も半順序集合 $(A, \leqslant)$ としてとらえられるし，その方が簡単でわかりやすいことも多い (例 2.1.1 を参照)．ブール演算 $+$，$\cdot$，$-$ および 0，1 はこの半順序から一意に定められるので

あった．しかしながら，たとえば，分配則（**D**）を扱うために，しばしば演算の体系 ＋，・，－ に立ち戻らなければならないことがある．以下の例は，ブール代数がどういう形を取りうるかということの感じを摑むための助けになるだろう．特に，例 2.1.1，2.1.2，2.1.3 は，本書全体にわたって重要な役割りを果たすことになる．

例 2.1.1　任意の集合 X に対し，半順序集合 $(P(X), \subseteq)$ はブール代数となる．このブール代数は X 上の**巾**(べき)**集合代数**と呼ばれる．このブール代数の最大元は，$1_{P(X)}=X$，また，最小元は，$0_{P(X)}=\emptyset$ となる．$x, y \in P(X)$ に対し，$x \cup y$ がその上限，また $x \cap y$ が下限となる．$X \backslash x$ は x の補元となる．$(P(X), \subseteq)$ で分配則が成り立つことは，他のブール代数の公理とともに，集合論では良く知られている．X が有限の場合には，ブール代数 $(P(X), \subseteq)$ を，演習問題 1.3.3 でのようにグラフで表現することができる．

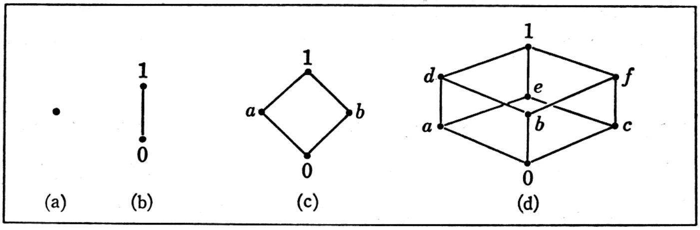
a)　X が空集合のとき，$P(X)$ は $\emptyset$ をただ1つの元として持つ．特に，$0_{P(X)}$ と $1_{P(X)}$ は等しくなる．このようなブール代数は，**自明なブール代数**と呼ばれる．

b)　X がただ1つの元からなるとき，$P(X)=\{1_{P(X)}, 0_{P(X)}\}$ となる．ここに，$1_{P(X)}=X$，$0_{P(X)}=\emptyset$ である．このブール代数，更にもっと一般に，2つの元からなるブール代数をすべて**2元ブール代数**と呼び，$\boldsymbol{2}$ で表わす．

c)　$X=\{x, y\}$ で $x \neq y$ のとき，$a=\{x\}$，$b=\{y\}$ として，$P(X)=\{0_{P(X)}, 1_{P(X)}, a, b\}$ となる．これは，**4元ブール代数**と呼ばれ，$\boldsymbol{4}$ で表わされる．

d)　$X=\{x, y, z\}$ で，x, y, z がそれぞれ異なるとき，$P(X)=\{0_{P(X)}, 1_{P(X)}, a, b, c, d, e, f\}$ となる．

ここに，$a=\{x\}$，$b=\{y\}$，$c=\{z\}$，$d=\{x, y\}$，$e=\{x, z\}$，$f=\{y, z\}$ である．



▮

$(B, +, \cdot, -, 1, 0)$ をブール代数として，A を 0 と 1 を含み演算 $+, \cdot, -$ に関し閉じている B の部分集合とする．このとき，A の元は，公理 **(V1)**〜**(C)** を満たすから，A は 0, 1 と A 上に制限された B の演算により，再びブール代数になる．簡単のため，このブール代数を，$(A, +\upharpoonright A^2, \cdots)$ と書く代わりに，$(A, +, \cdot, -, 1, 0)$ で表わすことにする．このような A は，B の**部分ブール代数**と呼ばれる．巾集合代数 $P(X)$ の部分ブール代数は，X 上の**集合ブール代数**とも呼ばれる．つまり，$(A, +, \cdot, -, 1, 0)$ は，

i）A の元は X の部分集合

ii）$x, y \in A$ に対し，$x+y=x\cup y$

iii）$x, y \in A$ に対し，$x\cdot y=x\cap y$

iv）$x \in A$ に対し，$-x=X\backslash x$

v）$x, y \in A$ に対し，$x\subseteq y$，かつそのときに限り $x\leqslant y$

が成り立つとき，X 上の集合ブール代数と呼ばれるわけである．条件 i)〜v) の全部ではないが，いくつかを満たすようなブール代数もある．たとえば，2.4 では，i), ii), iv) が成立するが，iii) と v) は成り立たないようなブール代数の例が示されるが，これは，集合ブール代数ではない．以下の例 2.1.2 から 2.1.5 までは，すべて集合ブール代数の例になっている．

例 2.1.2 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間として，$Clop(X)$ を，X の部分集合で開集合でも閉集合でもあるようなもの全体の集合とする．このような X の部分集合は，**開閉集合**と呼ばれる．$Clop(X)$ は X 上の集合ブール代数となる．このブール代数を，$(X, \mathcal{O})$ 上の**開閉ブール代数**と呼ぶ．∎

例 2.1.3 $(X, \leqslant)$ を最小元 0_X を持つ全順序集合とする．x, y を $x<y$ となる X の元とするとき，$[x, y)=\{z\in X \mid x\leqslant z<y\}$ は X の**半開区間**と呼ばれる．$x\in X$ に対し $[x, \infty)=\{z\in X \mid x\leqslant z\}$ も半開区間と呼ぶことにする．$Intalg(X)$ を有限個の半開区間の和集合として表わされる X の部分集合の全体の作る集合とする．$Intalg(X)$ は，X 上の集合ブール代数となり，$(X, \leqslant)$ 上の**区間ブール代数**と呼ばれる（演習問題 2.1.1 を参照）．∎

例 2.1.4 X を集合とする．X の部分集合 a は，$X\backslash a$ が有限であるとき，X で**補有限**であるという．集合 $FC(X)=\{a\subseteq X \mid a \text{ は有限または補有限}\}$ は，X 上の集合ブール代数になる．$FC(X)$ を，X 上の**有限-補有限ブール代数**と

呼ぶ． ▮

例 2.1.5 ルベーク可測な実数の集合（つまり，$a\subseteq \boldsymbol{R}$ で，ルベーク測度 $\mu(a)$ が定義されているもの）全体の作る集合は，$\boldsymbol{R}$ 上の集合ブール代数となる． ▮

最後に集合ブール代数でないブール代数の例を挙げよう．

例 2.1.6 N を 0 でない自然数として，$A=\{a\in \boldsymbol{N} \mid 1\leqslant a\leqslant N,\ a$ は N を割り切る$\}$ とする．$a, b\in A$ に対し，$a\subseteq b$ を，a は b を割り切ることと定義する．自然数の素因数分解を用いて $(A, \leqslant)$ が半順序集合であること，更に，分配束であることが確かめられる．$a, b\in A$ に対し，その最小公倍数が a, b の上限になり，最大公約数が下限となる．また，N が A の最大元になり，1 が A の最小元になる．$(A, \leqslant)$ は N がどの素数 P に対しても P^2 で割り切れないとき，かつそのときに限り，相補的，したがって，ブール代数になる． ▮

ブール代数の公理から，次の節で必要となるいくつかの計算法則を導こう．後に，われわれは 2.2 でブール代数の公理によらず，与えられた計算法則が正しいことを直接示す方法を学ぶことになる．

2.1.2 補題 ブール代数 A の任意の元 x, y, a に対し次のことが成り立つ：

a） $--x=x$

b） **（ド・モルガンの法則）**

$$-(x+y)=-x\cdot -y;\quad -(x\cdot y)=-x+-y$$

c） $x\leqslant y \Longleftrightarrow x\cdot -y=0 \Longleftrightarrow -y\leqslant -x$

d） $a\cdot x\leqslant y \Longleftrightarrow x\leqslant -a\cdot y$

証明 a）：x と $--x$ は共に $-x$ の補元であり，ブール代数は分配束であるから，補題 1.3.7 により，$x=--x$ がいえる．

b）：a）と同様に，たとえば，$-x\cdot -y$ が $x+y$ の補元であることがいえればよい．ところが，

$$\begin{aligned}-x\cdot -y\cdot (x+y)&=-x\cdot x\cdot -y+-x\cdot -y\cdot y\\ &=0+0\end{aligned}$$

$$=0$$

また，

$$
\begin{aligned}
-x\cdot -y+x+y &= -x\cdot -y+x\cdot(y+-y)+y\cdot(x+-x)\\
&= -x\cdot -y+x\cdot y+x\cdot -y+y\cdot x+y\cdot -x\\
&= x\cdot(y+-y)+-x(y+-y)\\
&= x+-x\\
&= 1
\end{aligned}
$$

となるからよい．

c)： $x\leqslant y$ なら $x=x\cdot y$ だから，$x\cdot -y=x\cdot y\cdot -y=0$． $x\cdot -y=0$ なら，$-y=-y\cdot(x+-x)=x\cdot -y+-x\cdot -y=-x\cdot -y$ となるから，$-y\leqslant -x$ である．以上で $-y\leqslant -x$ が $x\leqslant y$ から導かれることが示せたが，このことから，$-y\leqslant -x$ なら，$x=--x\leqslant --y=y$ となる．

d)： $a\cdot x\leqslant y$ とすると，$x=a\cdot x+-a\cdot x\leqslant y+-a$． 逆に，$x\leqslant -a+y$ なら，$a\cdot x\leqslant a\cdot(-a+y)=a\cdot -a+a\cdot y=a\cdot y\leqslant y$ となる． ▮

次の補題は，分配則，およびド・モルガンの法則を，無限和，あるいは無限積に拡張したものになっている．

2.1.3 補題 $\{x_i \mid i\in I\}$ をブール代数 A の部分集合とし，a を A の元とする．このとき，

a） $\sum_{i\in I}x_i$ が存在すれば，$\sum_{i\in I}a\cdot x_i$ も存在して，

$$a\cdot\sum_{i\in I}x_i=\sum_{i\in I}a\cdot x_i$$

が成り立つ．

b） $-\sum_{i\in I}x_i\simeq\prod_{i\in I}-x_i$ （ここに，$\simeq$ は 1.1 で定義されたものである）

証明 a)： $s=\sum_{i\in I}x_i$ と置く．各 $i\in I$ に対し，$x_i\leqslant s$ であるから，$a\cdot x_i\leqslant a\cdot s$ となり，$a\cdot s$ は $\{a\cdot x_i \mid i\in I\}$ の上界となっている．σを $\{a\cdot x_i \mid i\in I\}$ の任意の上界とする．このとき，$i\in I$ に対し，$a\cdot x_i\leqslant\sigma$ だから，補題 2.1.2 d) により，$x_i\leqslant -a+\sigma$，したがって，$s\leqslant -a+\sigma$ となり，$s\cdot a\leqslant\sigma$ がいえる．

b)： まず，$s=\sum_{i\in I}x_i$ が存在すると仮定しよう．$i\in I$ に対し，$x_i\leqslant s$ だから，$-s\leqslant -x_i$ となり，$-s$ は $\{-x_i \mid i\in I\}$ の下界であることが分かる．t をこの集合の任意の下界とするとき，$i\in I$ に対し，$t\leqslant -x_i$ が成り立つから，$x_i=--x_i$

$\leqslant -t$ となり，$s\leqslant -t$，したがって，$t\leqslant -s$ となる．よって，$-\sum_{i\in I}x_i=\prod_{i\in I}-x_i$ である．双対原理から，$\prod_{i\in I}y_i$ が存在すれば，$\sum_{i\in I}-y_i$ も存在して，$-\prod_{i\in I}y_i=\sum_{i\in I}-y_i$ が成り立つことがいえる．したがって，$\prod_{i\in I}-x_i$ が存在すれば，$-\prod_{i\in I}-x_i=\sum_{i\in I}--x_i$，つまり，$\prod_{i\in I}-x_i=-\sum_{i\in I}x_i$ が成り立つ．　▮

補題 2.1.3 a）の証明では，証明されるべき命題は，和と積のみに関するものであるにもかかわらず，補元の存在と補題 2.1.2 が用いられた．実際，この命題は，分配束の公理のみからでは，証明できない．たとえば，$\boldsymbol{R}$ の閉集合の全体の作る束 $(L,\subseteq)$ は完備な分配束となるが，補題 2.1.3 a）の等式は，$(L,\subseteq)$ で成立しない．$I=\boldsymbol{N}$ として，a を区間 $[1,\ 2]$ とし，x_i を区間 $\left[0,\ 1-\dfrac{1}{i+1}\right]$ とする．$\{x_i|i\in I\}$ の L での上限は区間 $[0,\ 1]$ となるから，$a\cdot\sum_{i\in I}x_i=\{1\}\neq\varnothing=\sum_{i\in I}a\cdot x_i$ である．

次の例は，それ自身としては自明であるが，しばしば非常に有用である．

例 2.1.7　A をブール代数として，$a\in A$ とする．$A\upharpoonright a=\{x\in A|x\leqslant a\}$ と定義すると，$A\upharpoonright a$ は，A の演算 $+$，$\cdot$ の $A\upharpoonright a$ への制限，最小元 0，最大元 a，補元 $-^{A\upharpoonright a}x=a\cdot -x$ によりブール代数となる．(**C**) が成り立つことをいう（他の公理が $A\upharpoonright a$ で成り立つことは，明らかである）．$x\in A\upharpoonright a$ とする．$x\cdot a\cdot -x=0$ は明らかだが，$x=a\cdot x$ により，$x+a\cdot -x=a\cdot x+a\cdot -x=a\cdot(x+-x)=a$ が成り立つ．

$A\upharpoonright a$ は A の a による**相対ブール代数**と呼ばれる．　▮

2.1 の演習問題

2.1.1　例 2.1.3 で定義された $Intalg(X)$ は集合ブール代数になることを示せ．（ヒント：まず，すべての $a\in Intalg(X)$ は，ある $0_X\leqslant u_1<v_1<\cdots<u_n<v_n\leqslant\infty$ により，

$$a=[u_1,v_1)\cup\cdots\cup[u_n,v_n)$$

と表現されることを示せ（この表現は，a の**標準表現**と呼ばれる））

2.1.2　$X\subseteq\boldsymbol{Z}$ と $n\in\boldsymbol{N}$，$n\neq 0$ に対し，

$$X+n=\{x+n\mid x\in X\}$$

とする．このとき，すべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対し，

$$A_n=\{X\subseteq\boldsymbol{Z}\mid X+n=X\}$$

は，$P(\{0,\ \cdots,\ n-1\})$ と同型な集合ブール代数になる．n が m で割り切れるとき，

A_m は A_n の部分ブール代数となる．$A=\bigcup_{n\in N} A_n$ も $\boldsymbol{Z}$ 上の集合ブール代数となる．

2.1.3 A, B, C をブール代数で，A は B の部分ブール代数，また，B は C の部分ブール代数となっているようなものとする．$M\subseteq A$ とする．このとき，次のことを示せ：

a）$\Sigma^A M$ と $\Sigma^C M$ が存在して $\Sigma^A M=\Sigma^C M$ となるとき，$\Sigma^B M$ も存在して $\Sigma^B M=\Sigma^A M$ となる．

b）$\Sigma^A M$ と $\Sigma^C M$ は存在しないが $\Sigma^B M$ は存在するような例を示せ．

2.1.4 $(L,\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1)$ を，0と1を持つ分配束とする．

$$C=\{x\in L \mid x \text{ は } L \text{ で補元を持つ}\}$$

とするとき，C は $+$，$\cdot$ に関して閉じており，この演算によりブール代数となることを示せ．

2.2 ストーンの双対定理——集合論的バージョン

前節のブール代数の例のほとんどは，集合ブール代数になっていた．実は，以下で述べるストーンの双対定理により，すべてのブール代数は，ある集合ブール代数と同型になっていることが分かる．この定理の証明には，ブール代数の準同型と，ブール代数上のフィルターに関するいくつかの基本的な命題が必要となる．なお，準同型とフィルターについては，第3章で再び詳しく論ずることにする．以下では混乱の生じない限り，ブール代数 $(A,\ +,\ \cdot,\ -,\ 1,\ 0)$ あるいは，$(A, \leqslant)$ を単にその**台集合** A で表わすことにする．

A と B をブール代数とする．A から B への写像 f は，ブール演算，$\cdot$，$-$を保存するとき，つまり，すべての $a, b\in A$ に対し，$f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$，$f(-a)=-f(a)$ が成り立つとき，（ブール代数の）**準同型写像**と呼ばれる．たとえば，すべての写像 $\varphi: X\to Y$ に対し，準同型写像 $\tilde{\varphi}: P(Y)\to P(X)$; $b\mapsto\varphi^{-1}[b]$ が定義される．f が準同型ならば，更に，演算 $+$，定数元 0, 1, および半順序 $\leqslant$ も保存する：ド・モルガンの法則により，$a, b\in A$ に対し，$a+b=-(-a\cdot -b)$ だから，

$$\begin{aligned} f(a+b) &= -(-f(a)\cdot -f(b)) \\ &= f(a)+f(b) \end{aligned}$$

また

$$f(1_A)=f(a+-a)$$

$$=f(a)+-f(a)$$
$$=1_B$$

$f(0_A)=0_B$ も同様に示せる．最後に，$a\leqslant b$ なら，$a=a\cdot b$ だから，$f(a)=f(a)\cdot f(b)$ となり，これから，$f(a)\leqslant f(b)$ がいえる．

$f: A\to B$ が準同型なら，A の f による像 $f[A]=\{f(a) \mid a\in A\}$ は，明らかに B の部分ブール代数となる．

準同型写像 $f: A\to B$ が，1対1写像であるとき，**単射**と呼び，B の上への写像であるとき，**全射**，または**上射**と呼ぶ．f が，この意味で全単射（全射かつ単射）になるとき，**同型写像**という．f が同型写像なら，その逆写像 f^{-1}: $B\to A$ も同型写像となる．A から B への同型写像が存在するとき，A と B は**同型**であるといい，これを $A\cong B$ で表わす．このとき，A と B は，台集合が異なることを除けば，同じ構造を持っていると考えることができる．

2.2.1 補題 準同型 $f: A\to B$ は，$f(a)>0$ がすべての $a\in A$ で $a>0$ となるものに対し成り立つとき，かつそのときに限り，単射になる．

証明 f が単射でないとき，$f(a)=0$ を満たす $a\in A$ で $a>0$ となるものが存在することが示せればよい．$x, y\in A$ を $x\neq y$ で $f(x)=f(y)$ となるものとする．たとえば，$x\not\leqslant y$ として，$a=x\cdot -y$ とすれば，$a>0$ が成り立つ．このとき，$f(a)=f(x)\cdot -f(y)=0$ となる． ∎

単射 $f: A\to B$ は，明らかに A から $f[A]$ への同型写像となっている．そこで，$f[A]$ を，A の f による B への**埋込み**とも呼ぶ．特に，B がある集合 X 上の巾集合代数であるとき，f は，A から X 上の集合ブール代数への同型写像となる．以下で，任意のブール代数 A は，ある集合ブール代数と同型になることを示すが，その前にこれの特別な場合として，A が原子的ブール代数である場合を考えてみよう．この場合には，証明はより簡単になり，選択公理を用いずに行なうことができる．

ブール代数 A の元 a は，$a>0$ で，$0<b<a$ となるような $b\in A$ が存在しないとき，A の**原子元**と呼ばれる．すべての A の元 $c>0$ に対し，原子元 $a\in A$ で $a\leqslant c$ となるものが存在するとき，A は**原子的**であるという．A は，原子元を全く持たないとき，**無原子的**であるという．たとえば，すべての巾集合

代数，および有限ブール代数は原子的であり，($\{x\in\boldsymbol{R}|0\leqslant x\}$, $\leqslant$) 上の区間ブール代数は無原子的である.

2.2.2 補題 $a\in A$ は，すべての $b\in A$ に対し常に $a\leqslant b$ か $a\leqslant -b$ のどちらか一方のみが成立するとき，かつそのときに限り，A の原子元になる.

証明 a を原子元とし $b\in A$ とする．このとき，$a\nleqslant b$ なら，$0<a\cdot(-b)\leqslant a$ となり，a が原子元であることから，$a\cdot(-b)=a$ が成り立つ．したがって，$a\leqslant -b$ である．もし，$a\leqslant b$ かつ $a\leqslant -b$ なら，$a\leqslant b\cdot -b=0$ となるから，$a\leqslant b$ と $a\leqslant -b$ の両方は同時に成立しえない．逆に，$a\neq 0$ が原子元でなければ，$0<b<a$ となる $b\in A$ が存在するが，明らかに $a\leqslant b$ も $a\leqslant -b$ も成り立たない．また，$a=0$ とすれば，任意の $b\in A$ に対し，$a\leqslant b$ と $a\leqslant -b$ とが同時に成立する． ▮

$At(A)$ を，A の原子元の全体の作る集合としよう（$At(A)$ は空集合のこともありうる).

2.2.3 命題 すべてのブール代数 A に対し，$t(b)=\{a\in At(A)\mid a\leqslant b\}$ で定義される写像 $t: A\to P(At(A))$ は準同型である．t は，A が原子的であるとき，かつそのときに限り単射になる．t は，A が完備であるとき全射になる.

証明 $a\leqslant b\cdot c\Longleftrightarrow a\leqslant b$ かつ $a\leqslant c$ であるから，t は演算・を保存する．また，補題で 2.2.2 により，t は演算 $-$ も保存する．したがって，t は準同型である．補題 2.2.1 により，t が単射であることと，すべての $b\in A$, $b>0$ に対し $t(b)$ が空集合でないこととは同値だが，後者は，A が原子的であるということのいい換えになっている．また，A が完備なら，任意の $Y\subseteq At(A)$ に対し，$t(\sum Y)=Y$ となることが容易に示せる． ▮

すべての有限ブール代数は原子的かつ完備であるから，上の命題の特別な場合として，次の定理を得る.

2.2.4 定理 すべての有限ブール代数は，ある巾集合代数と同型になる． ▮

A が，ちょうど n 個の原子元 $a_1, \cdots, a_n$ を持つ有限ブール代数なら，$A\cong P(\{a_1, \cdots, a_n\})$ となり，A は 2^n 個の元を持つ．したがって，$k\in\boldsymbol{N}$ に対し，

k が2の巾 2^n であるとき，かつそのときに限り，ちょうど k 個の元を持つブール代数が存在する．B を 2^n 個の元を持つもう1つのブール代数とすれば，B も，ちょうど n 個の原子元を持つ．したがって，$At(A)$ から $At(B)$ への任意の全単射を拡張して $A \cong P(At(A))$ から $B \cong P(At(B))$ への同型写像が得られ，A と B は同型であることが分かる．

以下に述べるストーンの表現定理は，原子的ブール代数における命題 2.2.3 の，任意のブール代数への拡張となっている．次の定義はそこで必要となる．ブール代数 A の部分集合 x は，

$1 \in x$

$a \in x,\ b \in x$ なら $a \cdot b \in x$

$a \in x$ で，$b \in A,\ a \leqslant b$ なら，$b \in x$

を満たすとき，A 上の**フィルター**と呼ばれる．x が A 上のフィルターで，$a, b \in A$ のとき，$a \cdot b \in x$ と $a, b \in x$ は同値になり，$a \in x$ または，$b \in x$ のとき，$a+b \in x$ となる．フィルターの簡単な構成法をいくつか考えてみよう．たとえば，A の元 a に対し，$[a) = \{b \in A \mid a \leqslant b\}$ は A 上のフィルターとなり，a により生成された**単項フィルター**と呼ばれる．このフィルターは，明らかに A 上の a を含む最小のフィルターになっている．$a=1$ なら，$[a) = \{1\}$ となり，これは**自明なフィルター**と呼ばれる．これに対し，A 上のフィルター x は，$a \neq 1$ となる $a \in x$ があるとき，**自明でないフィルター**と呼ばれ，$0 \notin x$ のとき，**真のフィルター**であるという．もっと一般には，A の任意の部分集合 M に対し，

$$[M) = \{b \in A \mid n \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\},\ m_1, \cdots, m_n \in M \text{ があって } m_1 \cdot \cdots \cdot m_n \leqslant b\}$$

は M を部分集合として含むフィルターのうちで最小なものとなる．$[M)$ を M によって**生成されたフィルター**と呼ぶ．M が**有限交叉性**を持つとき，つまり，M の任意の有限部分集合 $\{m_1, \cdots m_n\}$ の下限 $m_1 \cdot \cdots \cdot m_n$ が0でないとき，かつそのときに限り，$[M)$ は真のフィルターになる．添数集合 I の各元 i に対し x_i が A 上のフィルターで，すべての $i, j \in I$ に対し $x_i \subseteq x_j$ か $x_j \subseteq x_i$ が成立するとき，$\bigcup_{i \in I} x_i$ も A 上のフィルターになる．A 上の真のフィルター x は，x を部分集合として含む A 上の真のフィルターが x 自身以外に存在しないとき，**極大フィルター**と呼ばれる．A 上のフィルター x は，す

べての $a\in A$ に対し，常に a か $-a$ のどちらか一方のみが x の元になるとき，**超フィルター**と呼ばれる．真のフィルター x は，すべての $a,b\in A$ に対し，$a+b\in x$ なら $a\in x$ か $b\in x$ が成り立つとき，**素フィルター**と呼ばれる．たとえば，X 上の集合ブール代数 A に対し，$x_0\in X$ として，$p=\{a\in A\mid x_0\in a\}$ は A 上の超フィルターになる．単項フィルター $[a)$ は a が原子元であるときに限り超フィルターとなる．

2.2.5 補題 A 上のフィルター x に対し，次の命題は同値である：

a）x は極大フィルターである．

b）x は超フィルターである．

c）x は素フィルターである．

証明 a)⇒b)：$a\in A$ とする．x は真のフィルターだから，a と $-a$ の少なくとも一方は x の元でない．もし a も $-a$ も x の元でないとすると，$a\notin x$ と x が極大であることから，$x\cup\{a\}$ により生成されたフィルターは真でない．したがって，$x\cup\{a\}$ は有限交叉性を持たない．そこで，$b_1\in x$ で $b_1\cdot a=0$ となるものが存在する．同様に，$b_2\in x$ で $b_2\cdot -a=0$ となるものも存在する．$b=b_1\cdot b_2$ は x の元であるが，$b=b\cdot a+b\cdot -a\leqslant b_1\cdot a+b_2\cdot -a=0$ となり，x が真のフィルターであることに矛盾する．b)⇒c)：x は超フィルターだから，特に真のフィルターである．$a,b\in A$ が x の元でないとすると，$-a,-b$ は x の元となる．したがって，$-a\cdot -b=-(a+b)\in x$ となり，$a+b\notin x$ である．c)⇒a)：y を，x を真部分集合として含む A 上のフィルターとする．$a\in y\backslash x$ としよう．$1=a+-a\in x$ で $a\notin x$ だから，x が素フィルターであることにより，$-a\in x$ となる．したがって，a と $-a$ が共に y の元となるから，y は真でない． ∎

2.2.6 補題 M をブール代数 A の部分集合とする．M が有限交叉性を持つとき，またそのときに限り，$M\subseteq x$ となる A 上の超フィルター x が存在する．

証明 $M\subseteq x$ となる A 上の超フィルターがあれば，M は，明らかに有限交叉性を持つ．逆に，M が有限交叉性を持つなら，M から生成されたフィルター f は真である．$P=\{g\subseteq A\mid g$ は A 上の真のフィルターで $f\subseteq g\}$ として，半順序集合 $(P,\subseteq)$ を考えてみよう．$(P,\subseteq)$ での任意の連鎖 $K=\{g_i\mid i$

$\in I\}$ は，$\bigcup_{i\in I} g_i$ を $(P, \subseteq)$ での上限として持つ．したがって，ツォルンの補題により，$(P, \subseteq)$ は極大元 x を持つ．明らかに，x は $M\subseteq x$ を満たす極大フィルターとなるから，補題 2.2.5 により，超フィルターである．▮

次に述べる定義と表記法は，後の章でも，いたる所で用いられる．ブール代数 A に対し，X を A 上の超フィルター全体の作る集合とする．**ストーン写像**と呼ばれる写像 $s: A\to P(X)$ を $s(a)=\{x\in X \mid a\in x\}$ で定義する．s の定義は，命題 2.2.3 の $t: A\to P(At(A))$ における（一般には空集合でさえありうるところの）原子元の集合 $At(A)$ を X に置き換えたものになっている．補題 2.2.6 は，この集合が，われわれの目的にとって十分に大きいことを示している．

2.2.7 定理（ストーンの表現定理——集合論的バージョン） ブール代数 A のストーン写像は，A から X 上の巾集合代数への単射となっている．したがって，A は集合ブール代数 $s[A]$ と同型である．

証明　$a, b\in A$ と $x\in X$ に対し，x がフィルターであることにより，$a\cdot b\in x$ と $a\in x$ かつ $b\in x$ は同値である．また，x が超フィルターであることから，$-a\in x$ と $a\notin x$ は同値になる．このことから，$s(a\cdot b)=s(a)\cap s(b)$，また，$s(-a)=X\setminus s(a)$ がわかる．したがって，s は A から $P(X)$ への準同型である．$a\in A$ が $a>0$ なら，補題 2.2.6 により，$a\in x$ となる超フィルター x が存在するから，$s(a)\neq\varnothing$ となり，補題 2.2.1 により，s は単射である．▮

ストーンの表現定理は，ブール代数が単純明解な構造を持っているという印象を与えがちだが，そう考えるのは少し早計すぎる．たとえば，群論においては，すべての群はある置換群と同型であることが示されるが，この定理により，群論自体が自明になるという兆しは毛頭ないし，多くの群論の研究の局面において，この定理はむしろ何の効力も発揮しない．とはいえ，ブール代数に関するいくつかの事実は，ストーンの表現定理から非常に簡単に導き出される．たとえば，

(1)　$t(x_1, \cdots, x_n)=t'(x_1, \cdots, x_n)$

を t と t' が変数 $x_1, \cdots, x_n$ とブール演算 $+$，$\cdot$，$-$，0，1 のみからなる

表現であるような等式とする．たとえば，これの例として，$t=x_1+x_2+x_3$，$t'=x_1+x_2\cdot -x_1+x_3\cdot -(x_1+x_2)$ の場合を考えてみよう．(1) がどのブール代数 A でも成り立つことを示すには，ストーンの表現定理により，(1) がすべての集合ブール代数で成り立つことが示せれば十分である．上の具体例については，$a_1\cup a_2\cup a_3=a_1\cup(a_2\backslash a_1)\cup(a_3\backslash(a_1\cup a_2))$ が任意の集合に対し成り立つことは自明だし，もし必要なら，真偽表を作って確かめられる．実際，常に (1) の形をした等式は，集合論の計算規則を用いることなく，真偽表を作ることで示せる．等式 (1) は 2 元ブール代数で成り立つとき，かつそのときに限り，すべてのブール代数で成り立つからである：$a_1, \cdots, a_n$ をブール代数 A の元として，$a=t(a_1, \cdots, a_n)\neq t'(a_1, \cdots, a_n)=a'$ となるとき，たとえば $a\not\leqslant a'$ とすれば，$a\cdot -a'\in x$ となるような超フィルター x が存在する．このとき，$a\in x$，$a'\notin x$ である．写像 $f: A\to \boldsymbol{2}$ を $f(c)=1\Longleftrightarrow c\in x$ で定義すると，f は準同型になる．ブール代数 $\boldsymbol{2}$ において $b_i=f(a_i)$，$(1\leqslant i\leqslant n)$，$b=f(a)$ $b'=f(a')$ と置くと，$t(b_1, \cdots, b_n)=b=1$，$t'(b_1, \cdots, b_n)=b'=0$ となり，等式 (1) は $\boldsymbol{2}$ でも成り立っていない．

一方，等式 (1) が $\boldsymbol{2}$ で成り立つかどうかは，$x_1, \cdots, x_n$ に 0 と 1 をすべてのやり方で代入してみることによって確かめられる．

$\boldsymbol{2}$，あるいはすべての巾集合代数で成り立つ等式は，すべてのブール代数でも成り立つという原理は，(1) の t と t' が無限和，あるいは無限積を含んでいる場合には，一般には成り立たない．われわれは，第 6 章でこれに関する一つの反例を学ぶことになる．実際，2.3 では，ストーン写像が，一般には，無限和あるいは無限積を保存しないことが示される．

2.2 の演習問題

2.2.1 A をブール代数として，$x\subseteq A$ に対し $\chi_x: A\to \boldsymbol{2}$ を x の特性関数とする．x は，χ_x がブール代数の準同型になるとき，かつ，そのときに限り，A 上の超フィルターになる．このことを示せ．

2.2.2 原子元の全体が上限を持たないようなブール代数の例を示せ．

2.2.3 Y を集合として，$f: A\to P(Y)$ を準同型とする．このとき，すべての $y\in Y$ に対し，

$$p=\{a\in A \mid y\in f(a)\}$$

は A 上の超フィルターである．逆に，Y を A 上の超フィルターからなる集合として，

$$f: A \to P(Y);\ a \mapsto \{y \in Y \mid a \in y\}$$

とすると，f は準同型となる．このことを示せ．

f が単射となるのはどんなときか？

2.2.4 $(X, \leqslant)$ を最小元を持つ全順序集合として，$Intalg(X)$ をその区間ブール代数とし，e を X の前半集合とする．つまり，e は $x \in e,\ y \in X,\ y \leqslant x$ なら $y \in e$ となる X の部分集合とする．$Intalg(X)$ の部分集合 p を以下のように定義しよう：$a \in Intalg(X)$ が標準表現

$$a = [u_1, v_1) \cup \cdots \cup [u_n, v_n)$$

を持つものとする（演習問題 2.1.1 を参照）．このとき，

$$a \in p \Longleftrightarrow \text{ある } i \text{ に対し，} u_i \in e \text{ かつ } v_i \notin e \text{ が成り立つ}$$

と定義する．p は $Intalg(X)$ の超フィルターとなることを示せ．

2.2.5 A をブール代数として，M, N を A の部分集合とする．すべての有限部分集合 $M_0 \subseteq M,\ N_0 \subseteq N$ に対し，

$$\sum M_0 \nleqslant \prod N_0$$

となるとき，かつ，このときに限り，A の超フィルター x で $M \subseteq x$ かつ $N \subseteq A \backslash x$ となるものが存在する．

2.2.6 I を任意の集合とする．各 $i \in I$ に対し，e_i をブール代数 A の有限部分集合として，$s_i = \sum e_i$ とする．集合 $\{s_i \mid i \in I\}$ が有限交叉性を持つなら，B の元の族 $(a_i)_{i \in I}$ で，$a_i \in e_i,\ i \in I$ を満たし，$\{a_i \mid i \in I\}$ が有限交叉性を持つようなものが存在する．これを示せ．

2.3 ストーン写像の性質

2.2 と同じ表記法を用いて，$s: A \to P(X)$ をストーン写像とする．この節では，どういうときに s が上射になるか，また，s はどういう無限和あるいは無限積を保存するかについて考察してみよう．

2.3.1 命題 Y と Z を，互いに素な，ブール代数 A 上の超フィルターの有限集合とする．このとき A の元で，すべての $y \in Y$ に含まれ，どの $z \in Z$ にも含まれないようなものが存在する．特に，A が有限のとき，ストーン写像は A から $P(X)$ への同型写像になる．

証明 $Y = \{y_1, \cdots, y_m\}$，$Z = \{z_1, \cdots, z_n\}$ とする．$1 \leqslant i \leqslant m$ と $1 \leqslant j \leqslant n$ に対し，y_i と z_j は異なる極大フィルターだから，y_i は z_j の部分集合でない．したがって，$a_{ij} \in y_i \backslash z_j$ となる元が存在する．各 i に対し，$a_i = a_{i1} \cdot \cdots \cdot a_{in}$

は $y_i\backslash(z_1\cup\cdots\cup z_n)$ の元だから，$a=a_1+\cdots+a_n$ は $(y_1\cap\cdots\cap y_m)\backslash(z_1\cup\cdots\cup z_n)$ の元になる．s の定義から，これは，$Y\subseteq s(a)$，$Z\subseteq X\backslash s(a)$ ということに他ならない．A が有限のときには，A 上の超フィルターの集合 X も有限になる．したがって，すべての $Y\subseteq X$ に対し，Y と $Z=X\backslash Y$ は有限である．この Y と Z に対し，$Y\subseteq s(a)$，$Z\subseteq X\backslash s(a)$ となる $a\in A$ をとると，$Y=s(a)$ となる．▮

ブール代数 A の元 a，b は $a\cdot b=0$ を満たすとき，**互いに素**であるという．A の部分集合 D は，そのすべての異なる2元が互いに素であるとき，**互いに素**であるという．

2.3.2 補題 すべての無限ブール代数は互いに素な無限部分集合を持つ．

証明 A を無限ブール代数とする．$a\in A$ に対し，2.1 で定義したように $A\upharpoonright a=\{x\in A \mid x\leqslant a\}$ とする．$a=b+c$ で $A\upharpoonright a$ が無限集合なら，少なくとも $A\upharpoonright b$ と $A\upharpoonright c$ のどちらかは無限集合である：すべての $x\in A\upharpoonright a$ は，$x=x\cdot a=x\cdot b+x\cdot c$ と表わせ，$x\cdot b\in A\upharpoonright b$，$x\cdot c\in A\upharpoonright c$ となるから，$A\upharpoonright b$ と $A\upharpoonright c$ が共に有限とすれば，$A\upharpoonright a$ も有限になるからである．互いに素な A の元 x_0, x_1, x_2, $\cdots$ を，$n\in \boldsymbol{N}$ に対し $b_n=-(x_0+\cdots+x_n)$ として $A\upharpoonright b_n$ が無限になるように帰納的に構成しよう．まず，$a<a<1$ となる $a\in A$ をとり，$A\upharpoonright -a$ が無限なら $x_0=a$，そうでなければ $x_0=-a$ とする．$A\upharpoonright b_n$ が無限になるように，x_0, $\cdots$, x_n が選ばれたとき，$0<a<b_n$ となる a をとり，$A\upharpoonright b_n\cdot -a$ が無限なら $x_{n+1}=a$，そうでなければ $x_{n+1}=b_n-a$ とすればよい．$\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$ は明らかに A の互いに素な無限部分集合となる．▮

ブール代数の準同型 $f: A\to B$ は，A の任意の部分集合の上限を保存するとき，つまり，任意の部分集合 $M\subseteq A$ に対し，$\sum^A M$ が存在するなら $\sum^B f[M]$ も存在して，$f(\sum^A M)=\sum^B f[M]$ が成り立つとき，**完備**であるという．このとき，補題 2.1.2 により，$\prod^A M$ が存在するなら，$\prod^B f[M]$ も存在して，$f(\prod^A M)=\prod^B f[M]$ が成り立つ．

2.3.3 命題 無限ブール代数のストーン写像は，上射でなく，完備でもない．

証明 A を無限ブール代数として，補題 2.3.2 により，D_0 を A の互いに素な無限部分集合とする．

ツォルンの補題により，A の互いに素な部分集合 E で $D_0 \subseteq E$ となるもののうち極大なものがある．これを D とすると，D の極大性から，$\sum^A D=1$ となる．D は無限集合だから，$M=\{-d \mid d \in D\}$ は有限交差性を持つ．したがって，補題 2.2.6 により，M を含む A 上の超フィルター x が存在する．$s(\sum^A D)=s(1)=X$ だから，$x \in s(\sum^A D)$ だが，どの $d \in D$ に対しても，$-d \in x$ により $d \notin x$，つまり，$x \notin s(d)$ である．したがって，$x \notin \bigcup_{d \in D} s(d) = \sum^{P(X)} s[D]$ となる．よって，s は完備でない．X の部分集合 $y=\bigcup_{d \in D} s(d)$ が $P(X)$ の部分ブール代数 $s[A]$ に含まれないことを示して，s が上射でないことを示そう．もし，$y=s(a)$ となるような $a \in A$ があったとすると，すべての $d \in D$ に対し $s(d) \subseteq s(a)$ だから，$d \leqslant a$ となる．よって，$1=\sum^A D \leqslant a$ となり，$a=1$，したがって，$y=s(1)=X$ となるが，これは上に示したことと矛盾する．▮

上の証明と同じ論法により，D の任意の無限部分集合 D' に対して，$\bigcup_{d \in D'} s(d)$ は $s[A]$ の元でないことが示せる．更に，M が A の部分集合で $\sum^A M$ が存在するとき，$s(\sum^A M)=\sum^{P(X)} s[M]$ が成り立つのは，M の有限部分集合 M_0 で $\sum^A M=\sum^A M_0$ となるものがあるときに限る，ということが分かる（演習問題 2.3.1 を参照）．

無限基数に関する初等的な知識を仮定すれば，すべての無限基数 κ に対し，濃度が κ となるブール代数が存在することを容易に示せる．たとえば，濃度 κ の全順序集合 $(X, \leqslant)$ 上の区間ブール代数を考えればよい．一方，完備ブール代数においては，次の補題 2.3.4 が示すように，その濃度に関するいくつかの制約が存在する．

ブール代数 A は，A の任意の可算部分集合 M に対し，$\sum^A M$ が存在するとき，**σ-完備**であるという．完備なブール代数はもちろん σ-完備でもある．

2.3.4 補題 σ-完備なブール代数は，少なくとも濃度 $2^{\aleph_0}$ を持つ．

証明 σ-完備なブール代数 A に対し，補題 2.3.2 により，$A \setminus \{0\}$ の互いに素な部分集合 $\{x_n \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ をとれば，写像 $P(\boldsymbol{N}) \to A$; $M \mapsto \sum_{n \in M} x_n$ は1対1

写像になる．M と M' が N の異なる部分集合で，たとえば，$n\in M\backslash M'$ とすれば，$x_n\cdot f(M)=x_n>0$ であるが，$m\in M'$ に対し $n\neq m$ だから，$x_n\cdot x_m=0$，したがって，補題 2.1.3 a) から，$x_n\cdot f(M')=0$ となるからである．▮

2.3 の演習問題

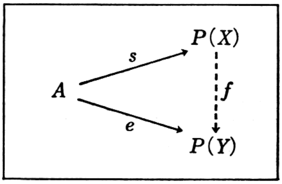
2.3.1 $s:A\to P(X)$ をストーン写像とし，$M\subseteq A$ は A で上限を持つものとする．有限な $M_0\subseteq M$ で $\sum M^A=\sum^A M_0$ となるものが存在するとき，かつ，このときに限り，$s(\sum^A M)=\bigcup s[M]$ が成り立つことを示せ．

Y を集合とし，A をブール代数とする．$e:A\to P(Y)$ が単射のとき，e は A の**表現**と呼ばれる．A の表現 e は，任意の異なる $y,y'\in Y$ に対し，$y\in e(a)$，$y'\notin e(a)$ となる $a\in A$ が存在するとき，**既約**であるという．e は，すべての A 上の超フィルター p に対し，$y\in Y$ が存在して，

$$p=\{a\in A \mid y\in e(a)\}$$

となるとき，**完全**であるという．

2.3.2 ストーン写像による表現 $s:A\to P(X)$ は既約で完全である．$e:A\to P(X)$ を，もう1つの既約で完全な表現とすれば，全単射 $\varphi:Y\to X$ で，これからひき起こされる同型写像 $f:P(X)\to P(Y)$; $c\mapsto\varphi^{-1}[c]$ が $f\circ s=e$ を満たすようなものが一意に存在する．このことを示せ．



2.4 完備ブール代数

1.4 で定義したように，ブール代数 A は，A の任意の部分集合が A で上限を持つとき，完備であるという．補題 1.4.1 あるいは補題 2.1.3 b) により，このときには，A の任意の部分集合は A で下限も持つ．2.1 の例では巾集合代数 $(P(X),\subseteq)$ が完備であった．この節では，完備ブール代数の1つの構成法を与える．実はこの方法により，同型を除いてすべての完備ブール代数が構成できることが後で示される．更に，任意のブール代数 A は，完備ブール代数に完備に埋込まれることを示す（ストーン写像 s は，A を完備ブール代数 $P(X)$ に埋込むが，2.3 で見たように一般には完備とはならないのであった）．

0 を持つ束 $(L,\subseteq)$ の元 $y\in L$ は，$x\in L$ と素な元のうち最大のものであ

るとき，つまり $x\cdot y=0$ で，$x\cdot z=0$ なら常に $z\leqslant y$ となるとき，x の**擬補元**と呼ばれる．x は高々1つの擬補元を持ち，これを x^* で表わす．$z\in L$ に対し $z\cdot x=0$ と $z\leqslant x^*$ は同値になる．x^* は x の補元になるとは限らない．L が最大元1を持っていたとしても，$x+x^*=1$ が成り立つとは限らないからである（例 2.4.1 を参照）．

2.4.1 定理　$(L,\leqslant)$ をすべての元 x が補元 x^* を持つような完備束とする．このとき，各 $x\in L$ に $\bar{x}=x^{**}$ を対応させる写像は L 上の閉包演算子となる．$^-$ に関し閉じた元の全体は，L の順序に関し完備ブール代数になる．

証明　$x,y\in L$ に対し

（1）　$x\leqslant y$ なら $y^*\leqslant x^*$

が成り立つ．$x\cdot y^*\leqslant y\cdot y^*=0$ より，$y^*\leqslant x^*$ となるからである．（1）を2回用いると $x\leqslant y$ なら $\bar{x}\leqslant\bar{y}$ が成り立つことが分かる．$x\cdot x^*=0$ だから

（2）　$x\leqslant x^{**}=\bar{x}$

である．更に，（2）の x に x^* を代入して $x^*\leqslant x^{***}$，逆に（2）と（1）により，$x^{***}\leqslant x^*$ となるから，

（3）　$x^*=x^{***}$

が成り立つ．（3）より $\bar{x}=x^{**}=x^{****}=\bar{\bar{x}}$，したがって，$^-$ は L 上の閉包演算子である．

定理 1.4.2 により $B=\{\bar{x}\mid x\in L\}$ として $(B,\leqslant)$ は，$0_B=0_L$，$1_B=1_L$ を持つ完備束となる．B の部分集合の和，あるいは積は定理 1.4.2 のように計算される．（3）により，$B=\{x^*\mid x\in L\}$ とも表わせる．$(B,\leqslant)$ が分配束になることを示そう．補題 1.3.6 により，$a\cdot_B(x+_By)=a\cdot_Bx+_Ba\cdot_By$ を示せばよい．$s=x+_By$ と置く．定理 1.4.2 により L での下限と B での下限は同じになるから，$\cdot_B$，$\cdot_L$ の代りに単に $\cdot$ と書くことにする．$x\leqslant s$ より $a\cdot x\leqslant a\cdot s$ は明らかである．同様に $a\cdot y\leqslant a\cdot s$ である．$t\in B$ で $a\cdot x\leqslant t$ かつ $a\cdot y\leqslant t$ となるものを任意にとり，$t=z^*$，$z\in L$ とするとき，$a\cdot s\leqslant t$ が示せればよい．$a\cdot x\leqslant z^*$ であるから $a\cdot x\cdot z=0$，したがって，$x\leqslant(a\cdot z)^*$ となる．同様に $y\leqslant(a\cdot z)^*$ がいえる．これから $s\leqslant(a\cdot z)^*$，よって，$s\cdot a\cdot z=0$，したがって，$a\cdot s\leqslant z^*=t$ である．$b\in B$ に対し b^* は b の B での補元になっている．$b\cdot b^*=0$ は明らかである．$b+_Bb^*=1$ を示そう．$t\in B$ を $b\leqslant t$

かつ $b^* \leqslant t$ となるものとして，$t=z^*$ とする．$b \leqslant z^*$ だから $b \cdot z=0$ である．また，$b^* \leqslant z^*$ より，$z \leqslant z^{**} \leqslant b^{**}=b$，したがって，$b \cdot z=z$ である．これから $z=0$，したがって，$t=1$ が分かる． ∎

定理 2.4.1 は，以下の例の状況において用いられることが多い．

例 2.4.1 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$u \subseteq X$ に対し，u^h で u の閉包，u^i で u の開核を表わすことにする．$u^c=X \backslash u$ を u の補集合とする．$L=\mathcal{O}$（X の開集合全体の作る集合）とすると $(L, \subseteq)$ は完備束になる．$1_L=X$, $0_L=\varnothing$, また $\{u_i | i \in I\} \subseteq L$ なら $\sum_{i \in I}^{L} u_i=\bigcup_{i \in I} u_i$, $\prod_{i \in I}^{L} u_i=(\bigcap_{i \in I} u_i)^i$ である．$u \in L$ に対し $u^*=u^{ci}$ が u の L での擬補元になる．したがって，$B=\{u \in L | u^{**}=u\}$ として，$(B, \subseteq)$ は完備ブール代数となる．X の開集合 u は，$u=\bar{u}=u^{**}=u^{cici}=u^{hi}$ が成り立つとき B の元になる．このような u は**正則開集合**と呼ばれる．B は $(X, \mathcal{O})$ 上の**正則開集合代数**と呼ばれ，$B=RO(X)$ と表わされる．B でのブール演算は以下のようになされる：$0_B=\varnothing$ また $1_B=X$ である．$u \in B$ に対し

（4） $-_B u=u^{ci}$

となる．$\{u_i | i \in I\} \subseteq B$ に対し

（5） $\sum_{i \in I}^{B} u_i=(\bigcup_{i \in I} u_i)^{hi}$,

（6） $\prod_{i \in I}^{B} u_i=(\bigcap_{i \in I} u_i)^i$,

特に $u, v \in B$ なら

（7） $u+_B v=(u \cup v)^{hi}$,

（8） $u \cdot_B v=u \cap v$

である．（4）と（7）により，$(B, \subseteq)$ は，一般には集合ブール代数にならない．巾集合代数 $(P(X), \subseteq)$ のときと違って正則開集合代数 $RO(X)$ は無原子的でありうる．たとえば，X として実数の集合を普通の位相で考えたときがそうである．このときには任意の開区間が正則になるからである．

特に，$(P, \leqslant)$ を任意の半順序集合とするときに 1.2 での半順序位相から正則開集合代数 $RO(P)$ を構成することができる．P の開集合 u がどういうときに正則開集合になるか考えてみよう．（2）から $u \subseteq u^{hi}$ は常に成り立つから，u は $u^{hi} \subseteq u$ が成り立つちょうどそのときに正則開集合になる．つまり

1.2 により，任意の $p \notin u$ となる $p \in P$ に対し，どの $r \leqslant q$ も u の元とならないような $q \leqslant p$ が存在するとき，正則開集合となるわけである．

ブール代数 B の部分集合 D は，$0 \notin D$ で，どの $b \in B$ に対しても $d \leqslant b$ となる $d \in D$ があるとき，B で**稠密**であるという．B の部分ブール代数 B_0 は，$B_0 \setminus \{0\}$ が B で稠密なとき，**稠密**であるという．ブール代数 A から B への単射 e は，$e[A]$ が B で稠密なとき，**稠密**であるという．

2.4.2 補題　a）$D \subseteq A \setminus \{0\}$ に対し以下は同値：

（i）D は B で稠密

（ii）すべての $b \in B$ に対し $b = \sum D'$ となる互いに素な D の部分集合 D' が存在する

（iii）すべての $b \in B$ に対し $b = \sum D'$ となる D の部分集合 D' が存在する

（iv）すべての $b \in B$ に対し $b = \sum \{d \in D \mid d \leqslant b\}$.

b）すべての稠密な単射は完備である．

c）A が完備で $e: A \to B$ が稠密な単射のとき，e は同型写像になる．

証明　a）:（i）⇒（ii）以外は明らかである．D を B で稠密とし，$b \in B$ とする．ツォルンの補題により，$D \cap B \upharpoonright b$ の互いに素な部分集合のうち極大なもの M がある．$b = \sum M$ を示そう．b は M の上界であるから，もし等式が成り立たなければ，M の上界 s で $s < b$ となるものがある．このとき，$b \cdot -s > 0$ であるから $0 < d \leqslant b \cdot -s$ となる $d \in D$ がある．$M \cup \{d\}$ は再び $D \cap B \upharpoonright b$ の互いに素な部分集合になるが，これは M の極大性に矛盾する．

b）: 簡単のために以下では A は B の稠密な部分ブール代数であるとし，e は A 上の恒等写像であるとする．$a = \sum^A M$ の存在するような $M \subseteq A$ に対し，a は M の A での上限であるが，B での M の上限でもある：b が M の B での上限で $a > b$ とすると $0 < d \leqslant a \cdot -b$ となる $d \in A$ が存在する．$a' = a \cdot -d$ は A の元で $a' < a$ であるが，a' はまた M の上限にもなるから，$a = \sum^A M$ に矛盾する．

c）: $B \subseteq A$ を示す．b を B の元とすると，a）により $b = \sum^B M$ となる $M \subseteq A \setminus \{0\}$ がとれる．A が完備であることから，$a = \sum^A M$ となる $a \in A$ が存在するが，b）から $a = b$ である．　▮

(e, B) は，B が完備で e がブール代数 A から B への稠密な単射であるとき，A の**完備化**と呼ばれる．

2.4.3 命題 $P=A\backslash\{0\}$ を A の半順序による半順序集合と考えて，$B=RO(P)$ とし，$e: A\to B$ を，$x\in A\backslash\{0\}$ に対し $e(x)=b_x=\{p\in P \mid p\leqslant x\}$，$e(0_A)=\emptyset$ で定義する．このとき (e, B) は A の完備化になる．

証明 $x\in P$ とする．まず b_x が正則開集合であることを示そう．$p\in P$ を $p\notin b_x$ つまり $p\not\leqslant x$ とする．このとき A で $q=p\cdot -x>0$ が成り立つ．q は P の元で $q\leqslant p$ である．$r\leqslant q$ が b_x の元なら $r\leqslant x$ となるが，$r\leqslant p\cdot -x$ でもあるから，$r=0$ となり，$r\in P$ に矛盾する．したがって，補題 2.4.2 の前で述べたことによって b_x は正則開集合となり，e は A から B への写像であることが分かる．

次に e が準同型写像であることを示そう．$a, b\in A$ に対し $e(a\cdot_A b)=e(a)\cap e(b)$ は明らかである．$e(-_A a)=-_B e(a)$ である：$e(a)\cap e(-a)=\emptyset$ は明らかだから，$e(a)+_B e(-a)=1_B$ を示せばよい．$u\subseteq P$ を $e(a)\bigcup e(-a)\subseteq u$ となる正則開集合として $u=P$ を示す．$u\neq P$ とすると，$p\in P\backslash u$ がとれる．u が正則開集合で p が u の元でないことから，どの $r\leqslant q$ も u の元にならないような $q\leqslant p$ がある．ブール代数 A の中で考えて，$q>0$ と $a+-a=1$ から，$q\cdot a>0$ または $q\cdot -a>0$ が成り立つ．仮に，$r=q\cdot a>0$ とすると，$r\in e(a)\subseteq u$ となるが，これは矛盾である．

更に，$a\in A$ に対し $a>0$ なら，$e(a)=b_a\neq\emptyset=0_B$ だから，e は単射である．

最後に e が稠密であることを示そう．u を P の空でない正則開集合とする．このとき，$x\in u$ とすれば，$e(x)=b_x\subseteq u$ となる．▮

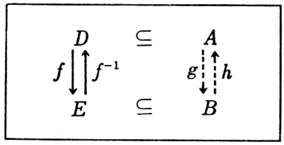
命題 2.4.3 によりすべてのブール代数 A に対しその完備化が存在する．更に系 2.4.6 で示されるようにこの完備化は，A 上の同型を除いて一意に決まる．命題 2.4.3 から次の命題が導かれる．

2.4.4 命題 すべての完備ブール代数は，ある位相空間の正則開集合代数と同型になる．

証明 A を完備ブール代数 $P=A\backslash\{0\}$，$B=RO(P)$ として，$e: A\to B$ を上と同様に定義する．このとき，補題 2.4.2 c) により e は同型写像となる．▮

$(D, \leqslant)$ と $(E, \leqslant)$ を半順序集合とする．写像 $f: D \to E$ は，写像として全単射で f と f^{-1} が共に順序を保つとき，**同型写像**と呼ばれる．

2.4.5 補題 A と B を完備ブール代数とし，D と E をそれぞれの稠密な部分集合とする．f を $(D, \leqslant)$ から $(E, \leqslant)$ への同型写像とするとき，A から B への同型写像 g で f の拡張となっているものが一意に存在する．



証明 A から B への同型写像は A の任意の部分集合の上限と下限を保存する．g が $f \subseteq g$ を満たす同型写像のとき，$a \in A$ に対し補題 2.4.2 a) により

$$a = \sum^A \{x \in D \mid x \leqslant a\},$$
$$g(a) = \sum^B \{g(x) \mid x \in D\ x \leqslant a\}$$
$$= \sum^B \{f(x) \mid x \in D\ x \leqslant a\}$$

となるから，g は f により一意に決まる．

さて，$a \in A$ に対し $g(a) = \sum^B \{f(x) \mid x \in D, x \leqslant a\}$ と定義する．B が完備であることから，実際に，g はこのように定義でき，明らかに順序を保存する．同様に，写像 $h: B \to A$ を $h(b) = \sum^A \{f^{-1}(y) \mid y \in E, y \in b\}$ で定義すれば，h は順序を保存する．$x, a \in D$ で $x \leqslant a$ なら $f(x) \leqslant f(a)$ となるから，$g(a) = f(a)$，したがって $f \subseteq g$ となる．同様に $f^{-1} \subseteq h$ もいえる．$h \circ g = id_A$ と $g \circ h = id_B$ が示せれば，g と h は $(A, \leqslant)$ と $(B, \leqslant)$ との同型写像となり，補題が証明される．

$h \circ g = id_A$ は

(9) $\{f(x) | x \in D,\ x \leqslant a\} = \{y | y \in E, y \leqslant g(a)\}$

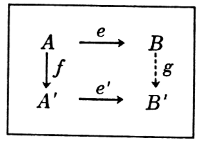
から導かれる．(9) がいえれば，任意の $a \in A$ に対し，D が A で稠密であることにより

$$h(g(a)) = \sum^A \{f^{-1}(y) | y \in E, y \leqslant g(a)\}$$
$$= \sum^A \{x | x \in D,\ x \leqslant a\}$$
$$= a$$

となるからである．(9) の $\subseteq$ は自明だから，$\supseteq$ を示そう．$y_0 \in E$ で $y_0 \leqslant g(a)$ とする．$y_0 = f(x_0)$ となる $x_0 \in D$ をとる．$x_0 \leqslant a$ が示せればよい．$x_0 \not\leqslant a$ なら，D が A で稠密であることから $0 < x_1 \leqslant x_0 \cdot -a$ となる $x_1 \in D$ が

とれる．$y_1=f(x_1)$ として $x_1\leqslant x_0$ から $y_1\leqslant f(x_0)=y_0\leqslant g(a)=\sum^B\{f(x)\mid x\in D,\ x\leqslant a\}$．$y_1>0$ と補題 2.1.3 a) により，$x\in D$ で $x\leqslant a$ かつ $y_1\cdot f(x)>0$ となるものがある．$y_2\in E$ を $y_2\leqslant y_1\cdot f(x)$ となるようにとると，$x_2=f^{-1}(y_2)$に対し $x_2\leqslant x\leqslant a$ かつ $x_2\leqslant x_1$ となる．したがって，$0<x_2\leqslant x_1\cdot a$ となるが，x_1 と a は定義から互いに素であるからこれは矛盾である．▮

2.4.6 系 $f:A\to A'$ をブール代数の同型写像とし，(e,B) を A の (e',B') を A' の完備化とする．このとき，$g\circ e=e'\circ f$ となる同型写像 $g:B\to B'$ が一意に存在する．▮



系 2.4.6 により A の完備化 (e,B) は一意にきまる．簡単のために，e は A 上の恒等写像であると仮定することが多い．そして A が B の稠密な部分ブール代数となるような 完備ブール代数 B のことを A の完備化と呼ぶ．このときには，$b\in B$ に対し $b=\sum^B\{a\in A\mid a\leqslant b\}$ となるから，B は A のすべての部分集合の上限，および下限を含むような B 自身の最小の部分ブール代数となっている．

2.4 の演習問題

半順序集合 $(P,\leqslant)$ は，すべての $x\in P$ に対し，$b_x=\{p\in P\mid p\leqslant x\}$ が正則開集合となるとき，つまり，$p\nleqslant x$ となる $p\in P$ に対し，$q\leqslant p$ で $r\leqslant q$ と $r\leqslant x$ が同時に成り立つような $r\in P$ を持たないようなものが存在するとき，分離的であるという．

2.4.1 以下の条件が同値になることを示せ：

a）$(P,\leqslant)$ は分離的である．

b）写像 $e:P\to RO(P)$；$x\longmapsto b_x$ は，P から $RO(P)$ の稠密な部分集合への 順序同型写像である．

c）P は，ある完備ブール代数 B の稠密な部分集合と同型である．

d）P は，あるブール代数 B の稠密な部分集合と同型である．

2.4.2 B を完備ブール代数として，$P\subseteq B\setminus\{0\}$ を B で稠密とする．このとき，$B\cong RO(P)$ となることを示せ．

2.4.3 実数上の区間 $[0,1)$ を実数のふつうの順序と位相のもとで考える．演習問題 2.1.1 で示されたように，$a\in Intalg([0,1))$ は標準表現

$$a=[u_1, v_1)\cup\cdots\cup[u_n, v_n)$$

を持つが，

$$e(a)=(u_1, v_1)\cup\cdots\cup(u_n, v_n)$$

と定義するとき，以下が成り立つことを示せ．

a） $(e, RO([0,1)))$ は $Intalg([0,1))$ の完備化である．

b） $RO([0,1)\cap \boldsymbol{Q})\cong RO([0,1))$．

第3章　部分ブール代数，準同型写像，フィルターとイデアル

この章では，古典的な代数的構造の体系の研究で常に重要な役割りを果たす，部分構造，準同型写像，商構造といった概念をブール代数の体系の中で詳しく調べてみよう．これらの概念に関する簡単な性質は，第2章で必要となったことがらについては，既に考察してあるから，ここでは部分ブール代数に関しては，ブール代数の部分集合によって生成された部分ブール代数がどのように記述されるか，準同型写像に関しては，与えられた写像が準同型写像に拡張できるのはどういうときかという問題を中心に考えてみる．

3.1　部分ブール代数

以下では B をブール代数とする．2.1 での定義により，B の部分集合 A は，0_B，1_B を含みブール演算 $+, \cdot, -$ に関して閉じているとき，B の部分ブール代数と呼ばれた．ド・モルガンの法則により，実際には，A は $\cdot, -$ に関して，あるいは，$+, -$ に関して閉じていれば，既に B の部分ブール代数となっている．

部分ブール代数の簡単な構成法をいくつか考えてみよう．$f: B \to B'$ をブール代数の準同型とし，A と A' をそれぞれ B と B' の部分ブール代数とする．このとき，$f[A] = \{f(a) \mid a \in A\}$ は B' の部分ブール代数となり，$f^{-1}[A'] = \{b \in B \mid f(b) \in A'\}$ は B の部分ブール代数となる．I を空でない集合として，各 $i \in I$ に対し A_i が B の部分ブール代数のとき，$\bigcap_{i \in I} A_i$ は B の部分ブール代数となる．更に，任意の $i, j \in I$ について $A_i \subseteq A_j$，または $A_j \subseteq A_i$ が常に成り立っていれば，$\bigcup_{i \in I} A_i$ も B の部分ブール代数となる．

さて，以下では常に X を B の任意の部分集合としよう．**B の X から生成された部分ブール代数** $[X]$ を

$$[X]=\bigcap\{A\subseteq B \mid X\subseteq A,\ A \text{ は } B \text{ の部分ブール代数}\}$$

で定義する．明らかに $[X]$ は，X を含むような B の部分ブール代数のうちで最小のものとなる．したがって，B の部分ブール代数 A に対し，$X\subseteq A$ と $[X]\subseteq A$ とは同値になる．X は $[X]$ の**生成系**と呼ばれる．系 3.1.4 で $[X]$ の元がどういう形をしているかが明らかにされる．

3.1.1 補題　X をブール代数 B の部分集合とする．このとき，$[X]=\bigcup\{[Y] \mid Y\subseteq X,\ Y \text{ は有限}\}$ が成り立つ．

証明　すべての X の部分集合 Y に対し $[Y]\subseteq[X]$ が成り立つから $A=\bigcup\{[Y] \mid Y\subseteq X,\ Y \text{ は有限}\}$ は $[X]$ の部分集合である．また，X は A の部分集合となるから，A が B の部分ブール代数であることがいえればよい．明らかに A は空集合ではなく，$-$ に関して閉じている．

更に，$a, b\in A$ に対し $a\cdot b\in A$ である：Y と Z を X の有限部分集合で $a\in[Y]$ かつ $b\in[Z]$ となるものとすると，a と b は $[Y\cup Z]$ の元だから $a\cdot b$ も $[Y\cup Z]\subseteq A$ の元となる．　▮

以下の補題では，次に述べる記法を用いることにする．

$X\subseteq B$ に対し $-X$ で集合 $\{-x \mid x\in X\}$ を表わす．B の元 p は，ある $n\in N$ と $y_1, \cdots, y_n\in X\cup -X$ により $p=y_1\cdot\cdots\cdot y_n$ と表わされるとき，X 上の**初等積**と呼ばれる．$s\in B$ は $s=p_1+\cdots+p_k$ となる X 上の初等積 $p_1, \cdots, p_k$ があるとき，X 上の**加法的標準型**で表現されるという．$y_{ij}\in X\cup -X$ として $p_i=y_{i1}\cdot\cdots\cdot y_{in(i)}$ なら，$s=y_{11}\cdot\cdots\cdot y_{1n(1)}+\cdots+y_{k1}\cdot\cdots\cdot y_{kn(k)}$ である．

$b\in B$ と $\varepsilon\in\{+1, -1\}$ に対し $\varepsilon\cdot b$ を $+1\cdot b=b$，$-1\cdot b=-b$ で定義する．次の補題 3.1.2 では，X は有限集合，$X=\{x_1, \cdots, x_n\}$ であるとする．E を $\{1, \cdots, n\}$ から $\{+1, -1\}$ への写像の全体の作る集合として，$e\in E$ に対し p_e を $p_e=\prod_{i=1}^{n} e(i)\cdot x_i$ で定義される初等積とする．p_e には，各 $i\in\{1, \cdots, n\}$ に対し，x_i か $-x_i$ かどちらかちょうど1つが積の項として現われることから，このようなものを X 上の**完全初等積**と呼ぶことにする．容易に分かるように

（1） $e \neq e'$ なら $p_e \cdot p_{e'} = 0$

（2） $\sum_{e \in E} p_e = 1$

が成り立つ．後者は，n に関する帰納法によって証明できる．ある $M \subseteq E$ によって $s_M = \sum_{e \in M} p_e$ の形に表わされるような元は，X 上の**完全加法的標準型**で表現されるという．以上の表記法により次の補題が成り立つ．

3.1.2 補題 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ によって生成された部分ブール代数は，X 上完全加法的標準型で表現される元の全体と一致する．

証明 $A = \{s_M \mid M \subseteq E\}$ として，$A \subseteq [X]$ は明らかである．（2）により，$1 \leqslant i \leqslant n$ に対し $x_i = \sum_{e(i)=1} p_e$ だから，$X \subseteq A$ である．更に，$M, M' \subseteq E$ に対し，（1）と（2）により，$s_M + s_{M'} = s_{M \cup M'}$，また $-s_M = s_{E \setminus M}$ が成立するから，A は B の部分ブール代数である． ▮

3.1.3 系 X を n 個の要素を持つ B の部分集合とするとき，B の X から生成された部分ブール代数は，$k = 2^n$ として 2^k 個以上の元を持たない．

証明 補題 3.1.2 の E は 2^n 個の元を持つから 2^k 個の異なる部分集合を持つ．このことから補題 3.1.2 により，$[X]$ は 2^k 個以上の元を持ちえないことが分かる． ▮

3.1.4 系 B の（必ずしも有限でない）部分集合 X から生成された部分ブール代数は，X 上の加法的標準型で表現される元の全体と一致する．

証明 補題 3.1.1 と補題 3.1.2 による． ▮

以下で系 3.1.4 の 3 つの応用例を示そう．

例 3.1.1 A を B の部分ブール代数として，x を B の元とする．B の $X = A \cup \{x\}$ から生成された部分ブール代数を $A(x)$ で表わそう．A が B の部分ブール代数であることから，X 上の初等積は $a, a', a'' \in A$ として $a \cdot x$ または $a' \cdot -x$ または $x \cdot -x$ または a'' の形をしている．$x \cdot -x$ は $0 \cdot x$，また a'' は $a'' \cdot x + a'' \cdot -x$ と表わせるから

$$A(x) = \{a \cdot x + a' \cdot -x \mid a, a' \in A\}$$

となることが分かる． ▮

例 3.1.2　例 3.1.1 と同様に，A と A' が B の部分ブール代数であるとき，

$$[A\cup A'] = \{a_1\cdot a_1' + \cdots + a_n\cdot a_n' \mid n\in \mathbf{N},\ a_1, \cdots, a_n\in A,\ a_1', \cdots, a_n'\in A'\}$$

が成り立つことが示せる．▮

例 3.1.3　X を B の連鎖とする．つまり，任意の $x, y\in X$ に対し $x\leqslant y$ または $y\leqslant x$ が成り立っているとする．$x_1, \cdots, x_n\in X$ で $x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n$ なら，$x_1\cdot\cdots\cdot x_n = x_1$ また $(-x_1)\cdot\cdots\cdot(-x_n) = -(x_1+\cdots+x_n) = -x_n$ となる．したがって，

$$[X] = \{y_1\cdot -x_1 + \cdots + y_k\cdot -x_k \mid k\in \mathbf{N};$$
$$x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_k\in X\cup\{0_B, 1_B\}\}$$

が成り立つ．上の表現で一般性を失うことなく，$x_1<y_1<\cdots<x_k<y_k$ であるという条件を付け加えることができる．実際，この $[X]$ は $X\cup\{0_B\}$ 上の区間ブール代数と同型になることが 3.2 で示される．▮

3.1 の演習問題

3.1.1　A を B の部分ブール代数として，$x_1, \cdots, x_n$ を互いに素な B の元で，$x_1+\cdots+x_n=1$ となるものとする．このとき，$A(x_1, \cdots, x_n)$ を $A\cup\{x_1, \cdots, x_n\}$ から生成された B の部分ブール代数として，

$$A(x_1, \cdots, x_n) = \{a_1\cdot x_1+\cdots+a_n\cdot x_n \mid a_1, \cdots, a_n\in A\}$$

が成り立つ．このことを示せ．

3.1.2　I を有限集合とする．以下を示せ．

a）I 上の同値関係 $\sim$ に対し，

$$B_\sim = \{M\subseteq I \mid m\in M,\ i\in I,\ m\sim i \text{ なら } i\in M\}$$

は $P(I)$ の部分ブール代数になる．

b）$P(I)$ のすべての部分ブール代数は a）によって構成できる．

3.1.3　ブール代数 B は，互いに素な元からなる生成系 X を持つとき，かつそのときに限り，ある集合 I 上の有限-補有限ブール代数 $FC(I)$ と同型になる．

3.1.4　I を集合として，F を I から $\{0,1\}$ への写像の全体の集合とする．B を F 上の巾集合代数とする．$i\in I$ に対し，$u_i\in B$ を $u_i=\{x\in F \mid x(i)=1\}$ で定義し，$U=\{u_i \mid i\in I\}$ とする．このとき，自明でない初等積 $e_1\cdot u_1\cdot\cdots\cdot e_n\cdot u_n$ $(e_1, \cdots, e_n\in\{+1, -1\}$ で $u_1, \cdots, u_n\in U$ は互いに異なるものとする）は 0 にならないことを示せ――$U\subseteq B$ のこのような性質は 4.3 で独立性と呼ばれることになる．

κ を無限基数として，B をブール代数とする．B は **κ-完備**であるとする．つまり，

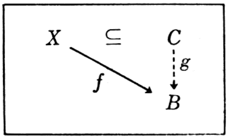
すべての $M \subseteq B$ で $|M| \leq \kappa$ となるものが常に上限と下限を持つものとする．B の部分ブール代数 C は，すべての $M \subseteq C$ で $|M| \leq \kappa$ となるものに対し，$\sum^B M$ および $\prod^B M$ が常に C の元となるとき，**κ-完備部分ブール代数**と呼ばれる．

3.1.5 X を B の部分集合として，X から生成された κ-完備部分ブール代数 C を

$$C = \bigcap \{A' \mid X \subseteq A' \subseteq B,\ A' \text{ は } B \text{ の } \kappa\text{-完備部分ブール代数}\}$$

と定義する．C は X を含む B の κ-完備ブール代数のうちで最小のものとなることを示せ．

3.2 準同型写像の拡張



次のような状況を考えてみよう：B と C をブール代数として，X を C の部分集合，f を X から B への写像とする．このとき C から B への準同型写像 g で f の拡張となっているものが存在するだろうか？ 特に，C が X によって生成される場合（補題 3.2.1），C が $X = A \cup \{x\}$ によって生成される場合（補題 3.2.2），X が C の部分ブール代数の場合（定理 3.2.3）が，問題となる．

3.2.1 補題 X を C の生成系として f を X から B への写像とする．X の任意の有限部分集合 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 上の完全初等積 $\prod_{i=1}^{n} e(i) \cdot x_i$ に対し，

$$(*) \quad \prod_{i=1}^{n} e(i) \cdot x_i = 0 \text{ なら } \prod_{i=1}^{n} e(i) \cdot f(x_i) = 0$$

となるとき，かつそのときに限り，C から B への準同型 g で f の拡張となっているものが一意に存在する．

注意 （$*$）は，より直観的には，

$y_1, \cdots, y_k$ と $z_1, \cdots, z_l$ が $y_1 \cdot \cdots \cdot y_k \leq z_1 + \cdots + z_l$ を満たす X の元なら

$f(y_1) \cdot \cdots \cdot f(y_k) \leq f(z_1) + \cdots + f(z_l)$ が成立する

と表現することができる．

証明 g と g' を C から B への準同型写像で f の拡張となっているものとすると，$\{c \in C \mid g(c) = g'(c)\}$ は X を含む C の部分ブール代数となるから，C と等しくなる．したがって $g = g'$ である．$g : C \to B$ が f の拡張となっている準同型のとき，$\prod_{i=1}^{n} e(i) \cdot x_i = 0$ なら，

$$\prod_{i=1}^{n} e(i) f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} e(i) g(x_i) = g\left(\prod_{i=1}^{n} e(i) \cdot x_i\right) = g(0) = 0$$

となるから（✻）が成立する．

次に（✻）が成り立つと仮定しよう．まず，X が有限で $X=\{x_1, \cdots, x_n\}$ となる場合を考えてみよう．補題3.1.2での表記法により，各 $e\in E$ に対し，$q_e=\prod_{i=1}^{n} e(i) f(x_i)$ とする．また $M\subseteq E$ に対し，$t_M=\sum_{e\in M} q_e$ とおく．このとき，（✻）は $p_e=0$ なら $q_e=0$ ということの言い換えになっていることが分かる．補題3.1.2により，$\{s_M \mid M\subseteq E\}$ は，X から生成された C の部分ブール代数となるから，$M\subseteq E$ に対して $g(s_M)=t_M$ と定義する．$M'\subseteq E$ に対し $s_M=s_{M'}$ とすれば，$e\in(M\backslash M')\cup(M'\backslash M)$ に対し $p_e=0$ となる．たとえば，$e\in M\backslash M'$ として，3.1の（1）により，$p_e=p_e\cdot s_M=p_e\cdot s_{M'}=0$ となるからである．したがって（✻）により，$e\in(M\backslash M')\cup(M'\cup M)$ に対し $q_e=0$ となるから $t_M=t_{M\cap M'}=t_{M'}$ となる．このことから上の g の定義が可能であることが分かる．

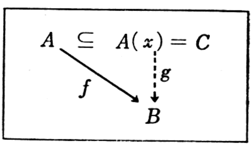
g は準同型である：$M, M'\subseteq E$ に対し，$g(s_M+s_{M'})=g(s_{M\cup M'})=t_{M\cup M'}=t_M+t_{M'}$，また $g(-s_M)=g(s_{E\setminus M})=t_{E\setminus M}=-t_M$ となるからである．

g は f の拡張となっている：$1\leqslant i\leqslant n$ に対し $M=\{e\in E \mid e(i)=1\}$ として $x_i=s_M$ が成り立ち，したがって，$g(x_i)=t_M=f(x_i)$ となるからである．

X が無限集合のときは，今までに証明したことから，X のすべての有限部分集合 Y に対し，準同型 $g_Y:[Y]\to B$ で $f\restriction Y$ の拡張となっているものが一意に存在する．

$$g=\bigcup\{g_Y | Y \text{ は } X \text{ の有限部分集合}\}$$

として，g が写像になっていれば，これが求めるものである．$c\in[Y]\cap[Z]$ とする．ここに Y と Z は X の有限部分集合とする．このとき，$g_{Y\cup Z}\restriction[Y]$ は，$f\restriction Y$ の拡張で，$[Y]$ から B への準同型写像となるから，g_Y と等しくなる．したがって，$g_Y(c)=g_{Y\cup Z}(c)=g_Z(c)$ が成り立つ．　▮



3.2.2 補題　$C=A(x)$ とする．ここに，A は C の部分ブール代数で x は C の元とする．$f:A\to B$ を準同型として $y\in B$ とする．すべての $a\in A$ に対し，$a\leqslant x\Rightarrow f(a)\leqslant y$ および $x\leqslant a\Rightarrow y\leqslant f(a)$ が成り立つとき，かつそのときに限り，C から B の準同型で $f\subseteq g$

かつ $g(x)=y$ を満たすものが存在する．

証明　上の条件が必要であることは明らかである．補題 3.2.1 により上の条件は十分でもある： $p=a_1\cdot\cdots\cdot a_n\cdot x$ を $p=0$ となる初等積とすれば，$a=a_1\cdot\cdots\cdot a_n$ に対し，$x\leqslant -a$ だから，

$$y\leqslant f(-a)=f(-(a_1\cdot\cdots\cdot a_n))$$
$$=-(f(a_1)\cdot\cdots\cdot f(a_n))$$

となる．つまり，$0=f(a_1)\cdot\cdots\cdot f(a_n)\cdot y$ が成り立つ．

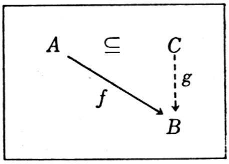
$a_1\cdot\cdots\cdot a_n\cdot -x$ の形をした p についても同様のことがいえるから，$f\cup\{(x,y)\}$ に対し，補題 3.2.1 の（＊）が成り立つことが分かる．▮

A, B, x, f が補題 3.2.2 のように与えられ，更に B が完備であるとき，補題の条件を満たすような $y\in B$ は常に存在する．

$$s=\sum{}^B\{f(a)|a\in A,\ a\leqslant x\}\leqslant\prod{}^B\{f(a)|a\in A,\ x\leqslant a\}=t$$

であるから，$s\leqslant y\leqslant t$ となる $y\leqslant B$ をとればよい．

3.2.3　定理（シコルスキーの拡張定理）　A を C の部分ブール代数として，f を A から完備ブール代数 B への準同型写像とする．このとき，C から B への準同型で f の拡張となっているものが存在する．

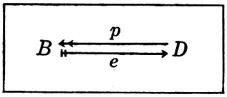


証明　C の部分ブール代数から B への準同型写像 h で $f\subseteq h$ を満たすものの全体の作る集合 P は，集合の包含関係に関して半順序集合となっている．$f\in P$ だから P は空集合でない．また P の任意の連鎖 K に対し $\bigcup K$ は K の P での上界となる．ツォルンの補題により，P の1つの極大元 g をとると，補題 3.2.2 とその後の注意により，g は C 上の準同型写像となることが分かる．▮

定理 3.2.3 の g は，一般には，f に対し一意的に決まらないし，f が単射であっても，単射になるとは限らない．しかし，A が C の稠密な部分ブール代数で f が単射の場合には g も単射となる．このときには，$c>0$ となる $c\in C$ に対し，$0<a\leqslant c$ を満たす $a\in A$ があるので，$0<f(a)\leqslant g(c)$ となるからで

ある．

ブール代数 B は，定理 3.2.3 で述べられたような性質を持つとき，つまり，任意のブール代数 $A \subseteq C$ と準同型 $f: A \to B$ に対し f の C 上への拡張 g が存在するとき，**単射的**であるという．B は，ブール代数 D に対し準同型 $e: B \to D$ と $p: D \to B$ で $p \circ e = id_B$ となるものが存在するとき，D の**レトラクト**と呼ばれる．このときには，e は単射になり，p は上射となる．



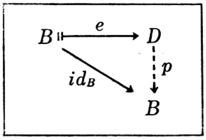
3.2.4 命題　すべてのブール代数 B に対し以下は同値である：

a）B は完備

b）B は単射的

c）B はすべての B を部分ブール代数として含むブール代数 D のレトラクトとなる．つまり，すべての B からあるブール代数 D への単射 $e: B \to D$ に対し上射 $p: D \to B$ で $p \circ e = id_B$ となるものが存在する．

証明　a)⇒b)：定理 3.2.3 による．b)⇒c)：右の図による．c)⇒a)：$e: B \to D$ を B から完備ブール代数 D（たとえば B の完備化）への単射とする．c）により，上射 $p: D \to B$ で $p \circ e = id_B$ となるものがある．このとき，B は完備である（より一般には，完備ブール代数のレトラクトは常に完備であることが示される）：任意の $M \subseteq B$ に対し $b = p(\sum^D e[M])$ が M の上限となることを示そう．$m \in M$ なら $e(m) \leqslant \sum^D e[M]$ だから，$m = p(e(m)) \leqslant b$ となり，b は M の上界である．$b' \in B$ を M の上界とすると，$e(b')$ は $e[M]$ の上界になるから，$\sum^D e[M] \leqslant e(b')$，したがって，$b = p(\sum^D e[M]) \leqslant p(e(b')) = b'$ となる．▮

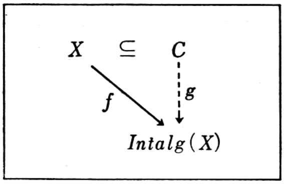


最後に，補題 3.2.1 のもう1つの応用例として，区間ブール代数の特徴づけを与える次の補題を考えてみよう．

3.2.5 補題　X をブール代数 C の生成系で C の半順序により全順序集合になっているものとする．f を X からブール代数 B への写像とする．f は単調増加であるとき，かつそのときに限り，C から B への準同型写像 g に一意に拡張される．

証明 この条件の必要性は明らかである．f が単調増加なら，補題 3.2.1 から g の存在と一意性が示せる：$x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_m$ を X の元で $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \cdot -y_1 \cdot \cdots \cdot -y_m = 0$ となるものとするとき，一般性を失うことなく，$x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, $y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_m$ として，$x_1 \cdot \cdots \cdot x_n = x_1$, $-y_1 \cdot \cdots \cdot -y_m = -(y_1 + \cdots + y_m) = -y_m$ となるから，$x_1 \leqslant y_m$ である．f が単調増加であることから $f(x_1) \leqslant \cdots \leqslant f(x_n)$, $f(y_1) \leqslant \cdots \leqslant f(y_m)$, $f(x_1) \leqslant f(y_m)$ が成り立ち，このことから，$f(x_1) \cdot \cdots \cdot f(x_n) \cdot -f(y_1) \cdot \cdots \cdot -f(y_n) = 0$ となって補題 3.2.1 の（＊）が成り立つことが分かる． ▮

3.2.6 命題 ブール代数 C は，C の半順序によって全順序集合となるような生成系 X を持つとき，かつそのときに限り，ある区間ブール代数と同型になる．



証明 例 2.1.3 の記号により，$C = Intalg(X)$ とすれば，$\{[0_X, x) \mid x \in X\}$ は，全順序集合で，C の生成系となる．逆に，全順序集合 X を C の生成系とするとき，一般性を失うことなく $0_C \in X$ と考えてよい．$f(x) = [0, x)$ で定義される写像 $f : X \to Intalg(X)$ は単調増加だから，補題 3.2.5 により，f の拡張となる準同型 $g : C \to Intalg(X)$ が存在する．g は上射である：$g[C]$ は $Intalg(X)$ の部分ブール代数で，$Intalg(X)$ の生成系 $f[X]$ を含み，したがって，$Intalg(X)$ と一致するからである．g は単射でもある：例 3.1.3 により，$c > 0$ を満たす $c \in C$ に対し，$x, y \in X$, $x < y$ で，$y \cdot -x \leqslant c$ となるものがあるから，$g(c) \geqslant f(y) \cdot -f(x) = [0, y) \setminus [0, x) = [x, y)$ となるが，$x < y$ だから $[x, y)$ は空でなく，したがって，$f(c) > 0$ となるからである． ▮

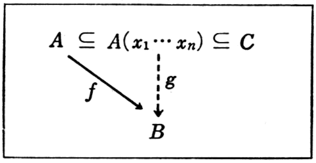
3.2 の演習問題

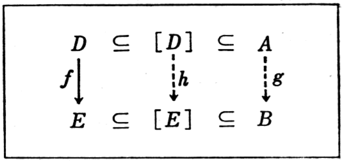
3.2.1 $f : A \to B$ をブール代数の準同型として，A は C の部分ブール代数であるとする．$x_1, \cdots, x_n \in C$ を互いに素で $x_1 + \cdots + x_n = 1$ を満たすものとする（演習問題 3.1.1 を参照）．$y_1, \cdots, y_n \in B$ とする．準同型 $g : A(x_1, \cdots, x_n) \to B$ で $f \subseteq g$ かつ $g(x_i) = y_i$ となるものが存在するのは，$y_1, \cdots, y_n$ が互いに素で $y_1 + \cdots + y_n = 1$ を満たし，

（1） $a \in A$ で $a \cdot x_i = 0$ なら $f(a) \cdot y_i = 0$

（2） $i(1), \cdots, i(k) \in \{1, \cdots, n\}$， $a \in A$ に対し $a \leqslant x_{i(1)} + \cdots + x_{i(k)}$ なら，$f(a) \leqslant y_{i(1)} + \cdots + y_{i(k)}$

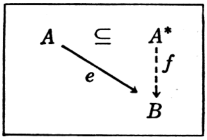
が成り立つとき，かつそのときに限る．このことを示せ．





3.2.2 補題 3.2.1 および定理 3.2.3 を用いて補題 2.4.5 を証明せよ（ヒント：右上の図を参照）．

3.2.3 B を完備として，$e : A \to B$ を完備な単射とし，A^* を A の完備化とする．このとき，定理 3.2.3 により，単射 $f : A^* \to B$ で $e \subseteq f$ となるものが存在するが，



a）このような単射は一意に存在する．

b）f は完備である．

c）B が $e[A]$ を含み，上限と下限に関して閉じている B の最小の部分ブール代数 B' と一致するなら，f は A^* から B への同型写像となる．

c）が完備化の定義として用いられることもある．

演習問題 3.1.5 での定義を用いる．A と B を κ-完備ブール代数とし，$f : A \to B$ を準同型とする．f は，すべての $M \subseteq A$ で $|M| \leqslant \kappa$ となるものに対し，常に $f(\Sigma^A M) = \Sigma^B f[M]$ が成り立つとき，**κ-完備**であるという．

3.2.4 A が $X \subseteq A$ から κ-完備に生成され，κ-完備な準同型 $f, g : A \to B$ が X 上で一致するなら，$f = g$ となることを示せ．

3.3 フィルターとイデアル

2.2 で，ブール代数 A 上のフィルターは，A の部分集合 F で，

i） $1 \in F$,

ii） $a, b \in F$ なら $a \cdot b \in F$,

iii） $a \in F$ で $x \in A$ に対し $a \leqslant x$ なら $x \in F$

を満たすものとして定義された．これの双対概念として，$I \subseteq A$ は，

i′） $0 \in I$,

ii′） $a, b \in I$ なら $a + b \in I$,

iii′) $a \in I$ で $x \in A$ に対し $x \leqslant a$ なら $x \in I$

を満たすとき，A 上の**イデアル**と呼ばれる．明らかに A の部分集合 X は $-X=\{-x \mid x \in X\}$ がフィルターになるとき，かつそのときに限り，イデアルになる．このとき，X は $-X$ の**随伴イデアル**と呼ばれ，$-X$ は X の**随伴フィルター**と呼ばれる．X が**真のイデアル**であるとき，つまり X はイデアルで $1 \notin I$ となるとき，$-X$ は真のフィルターとなり，$X \cap -X = \varnothing$ が成り立つ．I をイデアルとして F を I の随伴フィルターとしよう．このとき，F が単項フィルター $F=[b)$ なら，I は $a=-b$ によって生成された**単項イデアル** $(a]=\{x \in A \mid x \leqslant a\}=A \upharpoonright a$ となり，逆も成り立つ．F は，I が**素イデアル**，つまり極大な真のイデアルであるちょうどそのときに超フィルターになる．I の代りに F を用いて議論を進める方が具合の良いことが多い（たとえば補題 3.3.1 の証明を参照）半面，以下の例のように，I の定義の方が $F=-I$ の定義より直観的に分かりやすいことが多い．

例 3.3.1 ブール代数の準同型 $f: A \to B$ の核 $\mathrm{Ker}\, f=\{a \in A \mid f(a)=0\}$ は，A のイデアルである．これの随伴フィルターは $\{a \in A \mid f(a)=1\}$ となる． ▮

例 3.3.2 X を任意の集合とするとき X の有限部分集合の全体は，X の巾集合代数のイデアルになる． ▮

例 3.3.3 A を実数のルベーグ可測な集合の全体の作る集合，あるいは測度空間 (X, A, μ) の可測集合の全体の作るブール代数とする．このとき，$I=\{a \in A \mid \mu(a)=0\}$ は，A の“零集合”のイデアルとなる． ▮

I を A のイデアルとして，F をその随伴フィルターとする．$x, y \in A$ に対し $x \triangle y$ で x, y の**対称差** $x \cdot -y + y \cdot -x$ を表わすことにする．x と y は，以下の互いに同値な条件の 1 つが満たされるとき，I **上合同**であるといい，これを $x \sim_I y$ あるいは $x \sim_F y$ で表わす：

$x \triangle y \in I$

$x \cdot -y \in I$ かつ $y \cdot -x \in I$

$x+i=y+i$ となる $i \in I$ が存在する

$x \cdot f = y \cdot f$ となる $f \in F$ が存在する

3.3.1 補題 A 上のフィルター F によって定義された A 上の関係 $\sim_F$ は，

A のブール演算と両立する同値関係である．

証明　すべての $a \in A$ に対し，$a \cdot 1 = a \cdot 1$ が成立するから，$\sim_F$ は反射律を満たす．$\sim_F$ が対称律を満たすことは明らかである．以下では，a, a', b, b', c を A の元とする．

$a \sim_F b$ かつ $b \sim_F c$ のとき，$a \cdot f = b \cdot f,\ b \cdot f' = c \cdot f'$ となる $f, f' \in F$ をとれば，$f'' = f \cdot f'$ は F の元となり，

$$a \cdot f'' = a \cdot f \cdot f' = b \cdot f \cdot f' = c \cdot f \cdot f' = c \cdot f''$$

となるから，$a \sim_F c$ が成り立つ．したがって，$\sim_F$ は同値関係である．さて，$a \sim_F b$ かつ $a' \sim_F b'$ として，$a \cdot f = b \cdot f,\ a' \cdot f' = b' \cdot f'$ となる $f, f' \in F$ をとれば，$(-a) \cdot f = (-b) \cdot f$ となるから，$-a \sim_F -b$ である．また，$f'' = f \cdot f'$ として，$f'' \in F$ だが，

$$a \cdot a' \cdot f'' = a \cdot a' \cdot f \cdot f' = b \cdot b' \cdot f \cdot f' = b \cdot b' \cdot f''$$

となるから，$a \cdot a' \sim_F b \cdot b'$ が成立する．　∎

$a \in A$ に対し

$$\pi(a) = \{a' \in A \mid a \sim_F a'\}$$

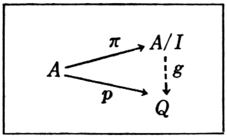
を $\sim_F$ に関する a の同値類として

$$A/F = A/I = \{\pi(a) \mid a \in A\}$$

を A の同値類の全体とする．このとき，π は A から A/F への写像になる．補題 3.3.1 により，A/F 上の演算 $+, \cdot, -$ を，A/F がブール代数となり，π が上射となるように一意的に定義できる．A/F は，A の F あるいは I による**商ブール代数**と呼ばれ，π は A から A/F への**自然な写像**と呼ばれる．A の元 a は $a+i=0+i=i$ となる $i \in I$ が存在するとき，つまり $a \in I$ のとき，π の核に属する．したがって，$Ker\,\pi = I$ である．同様に $\pi(a)=1$ と $a \in F$ は同値になる．容易にわかるように，A/I は，I が A の真でないイデアルであるとき，自明なブール代数となる．また，$A/I \cong 2$ と，I が素イデアルであること（あるいは F が超フィルターであること）は，同値である．

他の多くの代数的構造でと同じように，次の準同型定理が成り立つ．

3.3.2 補題（準同型定理） p を A から Q へのブール代数の準同型写像とし I をその核とする．π を A から A/I への自然な写像とするとき，A/I から Q への単射 g で $g\circ\pi=p$ を満たすものが一意に存在する． ▮



準同型定理の簡単な応用をいくつか考えてみよう．a を A の元とする．$p(y)=y\cdot a$ で定義される写像 $p:A\to A\restriction a$ は，A から相対ブール代数 $A\restriction a$ への上射になり，その核は $-a$ によって生成された単項イデアル $(-a]$ となる．したがって，準同型定理により $A/(-a]\cong A\restriction a$ が成り立つ．

次の例は，更に興味深い．$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする．X の部分集合 u は，$u^{hi}=\varnothing$ を満たすとき，**疎**であるという．u は，可算個の疎な集合の和集合であるとき，**第1類の集合**と呼ばれる．$I=\{u\subseteq X \mid u$ は第1類の集合$\}$ は，$P(X)$ のイデアルとなる．疎な集合の部分集合は，再び疎な集合となるからである．更に I は **σ-完備**でもある．つまり，I の可算部分集合の和集合は，I の元となる．$P(X)$ の部分ブール代数 A は，A の可算部分集合の和集合が常に A の元となるとき，$P(X)$ の **σ-部分ブール代数**と呼ばれる．X の開集合から生成される σ-部分ブール代数

$$Bor(X)=\bigcap\{A \mid \mathcal{O}\subseteq A\subseteq P(X),\ A \text{ は } P(X) \text{ の } \sigma\text{-部分ブール代数}\}$$

は，X の**ボレル集合のブール代数**，あるいは X の**ボレル代数**と呼ばれる．$Bor(X)$ は σ-完備で

$$M=\{a\in Bor(X) \mid a \text{ は第1類の集合}\}=I\cap Bor(X)$$

は $Bor(X)$ の σ-完備なイデアルであるから，$Bor(X)/M$ も σ-完備となる（演習問題 3.3.4 b）を参照）．この商ブール代数は，更に，場合によっては完備になることさえある（下の定理 3.3.3 を参照）．

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ は，すべての空でない開集合が第1類の集合でないとき，**ベールの性質**を満たすという．

ベールの定理により，局所コンパクト・ハウスドルフ位相空間および完備距離づけ可能な位相空間はベールの性質を満たす．証明は位相空間論の本を参照されたい．

3.3.3 定理　$(X, \mathcal{O})$ をベールの性質を満たす位相空間とする．このとき，第1類集合となるようなボレル集合の全体の作るイデアル M による X のボレル代数 $Bor(X)$ の商ブール代数 $Bor(X)/M$ は，$(X, \mathcal{O})$ の正則開集合代数 $RO(X)$ と同型になる．

証明　$RO(X)\subseteq\mathcal{O}\subseteq Bor(X)$ であることに注意しよう．定理は下の a)～e) から導かれる．

a）すべての $u\in Bor(X)$ に対し $r\in RO(X)$ で $u\sim_M r$ となるものは高々1つしか存在しない．$r=h(u)$ により $h: A\to RO(X)$ を定義する．ここに，

$$A=\{u\in Bor(X) \mid u\sim_M r \text{ となる } r\in RO(X) \text{ が存在する}\}$$

である．

b）$\mathcal{O}$ は A の部分集合となり，$r\in RO(X)$ に対し $h(r)=r$.

c）$u\in A$ で $h(u)=r$ なら，$X\backslash u\in A$ で $h(X\backslash u)=-_{RO(X)}r$.

d）$n\in N$ に対し $u_n\in A$ で $h(u_n)=r_n$ なら，$\bigcup_{n\in N} u_n\in A$ で，

$$h(\bigcup_{n\in N} u_n)=\sum_{n\in N}{}^{RO(X)} r_n$$

が成立する．

a) から d) までにより，$A=Bor(X)$ で h は $Bor(X)$ から $RO(X)$ への上射であることが示されるが，

e）h の核は M である．

したがって準同型定理から，$Bor(X)/M\cong RO(X)$ となる．

a）の証明：r と r' を正則開集合で $r\sim_M u\sim_M r'$ を満たすものとする．このとき，$r\sim_M r'$ だから，$r\backslash r'$，$r'\backslash r\in M$ となる．$r\neq r'$ として，たとえば，$r\nsubseteq r'$ なら，ブール代数 $RO(X)$ の中での計算により，$b\in RO(X)$ で $b\neq\emptyset$ $b\subseteq r$ $b\cap r'=\emptyset$ となるものがあることが分かる．たとえば，$b=r\cdot_{RO(X)}-_{RO(X)}r'$ とすればよい．ベールの性質により，$b\notin M$ であるから，これは $b\subseteq r\backslash r'$ と矛盾する．

b）の証明：開集合 u に対し $r=u^{hi}$ は正則開集合となる．$u\sim_M r$ が成り立つことを示そう．$u\backslash r=\emptyset\in M$ は明らかだが，$d=r\backslash u$ も第1類の集合になる：$r=u^{hi}\subseteq u^h$ により $d\subseteq u^h\backslash u$ だが，$u^h\backslash u$ は疎だから，d も疎な集合となるからである．b) の後半は明らかである．

c) の証明： $r'=-_{RO(X)}r=(X\backslash r)^i$ とする．b) で示されたように，$(X\backslash r)\backslash r'$ は疎だから，$X\backslash r\sim_M r'$，したがって，$X\backslash u\sim_M X\backslash r\sim_M r'$ となる．

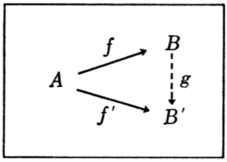
d) の証明： $\bigcup_{n\in N} r_n$ は開集合だから，b) の証明でと同様に $\sum_{n\in N}^{RO(X)} r_n=(\bigcup_{n\in N} r_n)^{hi}\sim_M \bigcup_{n\in N} r_n$ が成り立つ．

一方，$n\in N$ に対し $r_n\cup m_n=u_n\cup m_n$ となる $m_n\in M$ をとると，$m=\bigcup_{n\in N} m_n\in M$ で，$m\cup\bigcup_{n\in N} r_n=m\cup\bigcup_{n\in N} u_n$ となるから，$\bigcup_{n\in N} r_n\sim_M\bigcup_{n\in N} u_n$ である．

e) の証明： $u\in M$ で $r=h(u)$ なら，$\varnothing\sim_M u\sim_M r$ により，$\varnothing\sim_M r$ となるから，$r\in M$ である．したがって，ベールの性質により $r=\varnothing$ となる．反対に $h(u)=\varnothing$ なら定義から $u\sim_M\varnothing$，したがって $u\in M$ である．▮

3.3 の演習問題

3.3.1 $f:A\to B$ と $f':A\to B'$ を上射とする．準同型 $g:B\to B'$ で $g\circ f=f'$ となるものが存在するのは，$\mathrm{Ker}\, f\subseteq \mathrm{Ker}\, f'$ となるとき，かつこのときに限る．



3.3.2 a) ブール代数 A のイデアル全体 $Id(A)$ は包含関係による半順序のもとで完備な分配束となっていることを示せ．

b) J を A のイデアルとするとき，$Id(A/J)$ は $Id(A)$ の部分束 $\{I\in Id(A)\mid J\subseteq I\}$ と同型になる．

3.3.3 a) 束 $Id(A)$ のすべての元は擬補元 I^* を持つ．

b) $I\in Id(A)$ が $I^{**}=I$ を満たすとき，**正則**であるということにしよう．定理 2.4.1 により，正則なイデアルの全体 R は，包含関係による半順序のもとで完備ブール代数となる．すべての $a\in A$ に対し a から生成された単項イデアル $(a]$ は正則であることを示せ．

c) $e(a)=(a]$ により，A から R への稠密な単射が定義されることを示せ．このことから，R は A の完備化になることが分かる．

演習問題 3.1.5 と 3.2.4 での定義を用いる．A を κ-完備ブール代数として，I を A のイデアルとする．I は，すべての $M\subseteq I$ で $|M|\leqslant\kappa$ となるものに対し，$\sum^A I$ が常に I の元となるとき，**κ-完備**であるという．

3.3.4 a) I は，自然な写像 $\pi:A\to A/I$ が κ-完備な準同型となるとき，かつ，そのときに限り，κ-完備となる．

b) I が κ-完備なら A/I も κ-完備となる．

3.3.5　A を N の巾集合代数とし，I を N の有限部分集合の全体の作るイデアルとする．

a）A は原子的だが，A/I は無原子的となる．

b）A は完備だが，A/I では，すべての真の下降例 $x_0>x_1>x_2>\cdots$ は，0と異なる下界を持つ．特に，A/I は σ-完備ではない．

第4章　ストーンの双対理論

この章では，ブール空間と呼ばれる位相空間のクラスを定義する．ストーンの双対理論は，ブール代数およびブール代数の準同型写像が作る圏と，ブール空間および連続写像の作る圏の間に自然な対応が存在することを主張するものである．これらの圏の対象の間の対応は，4.1 で定義され，4.2 で共変関手に拡張される．この対応でブール代数の代数的な性質は，ブール空間の位相的性質に照応し，また逆も成り立つ．4.3 では自由ブール代数について考える．これは，3.2 での手法により既に扱えたはずの事柄ではあるが，ストーンの双対理論を用いることにより，自由ブール代数の存在が非常に自然なやり方で証明できるのである．

4.1　ストーンの表現定理――位相空間論的バージョン

例 2.1.2 と同様に，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し，$Clop(X)$ で，その開閉ブール代数を表わすことにする．X は，$Clop(X)$ が X の開集合系の基となる時，**0次元**であるという．X は開閉集合からなる開基を持つ，あるいは X は開閉集合からなる準基を持つという要請は，これと同値になる．X は，コンパクト・ハウスドルフで，0次元の位相空間のとき，**ブール空間**と呼ばれる．コンパクト・ハウスドルフ空間は，完全不連結であるとき，つまり X のすべての連結成分が1点からなるとき，かつそのときに限り0次元になる．このことの証明は，たいていの位相空間論の教科書に載っているが，本書でこの結果を用いることはない．

例 4.1.1　すべての有限離散空間，特に，離散位相で考えたときの $2=\{0,1\}$

はブール空間である．▮

例 4.1.2　$(X_i)_{i\in I}$ をブール空間の族とするとき，その直積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ はブール空間になる：コンパクト性および T_2-分離公理を直積が保存することは，位相空間論で良く知られている．また，X_{i_0} の開閉集合 a に対し，明らかに，

$$b_a=\{(x_i)\in\prod_{i\in I} X_i \mid x_{i_0}\in a\}$$

は $\prod X_i$ の開閉部分集合となるが，このような b_a の全体は $\prod_{i\in I} X_i$ の準基をなすから，$\prod X_i$ は0次元でもある．特に，任意の添数集合 I に対し直積空間 2^I はブール空間となる．この空間を，重み $|I|$ を持った**カントル空間**と呼ぶ．▮

例 4.1.3　X をブール空間，Y をその閉部分集合とするとき，Y は，X の位相から誘導された相対位相によりブール空間になる：a を X の開閉集合とするとき，$Y\cap a$ の形の集合の全体は Y の開基をなすが，$Y\cap a$ は Y で開閉集合となるからである．▮

すべてのブール空間が，あるカントル空間の部分空間と位相同型になることは，容易に示せる．たとえば，4.3 でこのことが明らかになる．

次に述べる位相空間論で良く知られている原理は，より一般的な形では，コンパクト・ハウスドルフ空間において成り立つ：X, Y をブール空間とし，$\varphi: X\to Y$ を連続写像とする．このとき，$\varphi[X]$ はブール空間となり，X から誘導された商位相を持つ．特に，φ が1対1写像のときには，φ は X と $\varphi[X]$ の間の同相写像となる．

4.1.1 補題　X をブール空間とする．

a）$B\subseteq Clop(X)$ を X の開基とするとき，B の任意の有限個の元の和集合が再び B の元となるなら，$B=Clop(X)$ が成り立つ．

b）Y を X の閉部分空間とし，b をその相対位相に関し開閉集合となる Y の部分集合とするとき，X の開閉部分集合 a で $b=a\cap Y$ となるものが存在する．

c）Y_1, Y_2 を互いに素な X の閉部分集合とするとき，X の開閉部分集合 a で $Y_1\subseteq a$ かつ $Y_2\subseteq X\setminus a$ となるものが存在する．

証明　a)：a を任意の X の開閉部分集合とする．B_0 を B の部分集合で

$a=\bigcup B_0$ となるものとすれば，a は X のコンパクトな部分集合だから，B_0 の有限個の元，$b_1, \cdots, b_n$ で覆われる．したがって，$a=b_1\cup\cdots\cup b_n$ となり，a は B の元であることが分かる．

b)：$Clop(X)$ は X の開基だから，$B=\{a\cap Y|a\in Clop(X)\}$ は Y の開基である．したがって，**a)** により $B=Clop(Y)$ が成り立つ．

c)：$Y=Y_1\cup Y_2$ は X の閉部分空間となり，Y_1 と Y_2 は Y の中で開閉集合になる．したがって，b) により $Y_1=a\cap Y$ となる X の開閉部分集合 a が存在する．この a が求めるものである． ▮

A をブール代数としよう．2.2 のストーンの定理の証明では，X を A 上の超フィルターの全体の集合として，ストーン写像 $s: A\to P(X)$ を

$$s(a)=\{x\in X \mid a\in x\}$$

によって定義した．以下では，X に

$$s[A]=\{s(a) \mid a\in A\}$$

を準基とする位相を入れて考えることにする．この位相のもとで，X は A の**ストーン空間**，あるいは A の**双対空間**と呼ばれ，$X=St(A)$ と書く．

4.1.2 定理（ストーンの表現定理——位相空間論的バージョン） 任意のブール代数 A に対し A のストーン空間 X はブール空間となり，X の任意の開閉集合は，$s(a)$，$a\in A$ の形をしている．したがって，s は A から X の開閉ブール代数 $Clop(X)$ への同型写像となる．

証明 $s[A]$ は $P(X)$ の部分ブール代数であったから，$s[A]$ の有限個の元の共通部分はまた $s[A]$ の元となり，したがって X の開基となる．すべての $a\in A$ に対し $X\backslash s(a)=s(-a)$ も X の開集合となるから，$s[A]\subseteq Clop(X)$ である．したがって，X は 0 次元となる．

X はハウスドルフである：x, y を X の異なる 2 点とする．つまり，x, y は A 上の異なる極大フィルターである．したがって，x は y の部分集合ではない．$a\in x\backslash y$ をとると，$s(a)$ と $(-a)$ は互いに素な X の部分集合となり，$x\in s(a)$ であるが，$a\notin y$ だから，$-a\in y$ となり $y\in s(-a)$ である．

X はコンパクトである：$X=\bigcup_{i\in I} u_i$ を X の開被覆とする．すべての u_i を X の開基であると仮定してよいから，$u_i=s(a_i)$ として，$b_i=-a_i$ と置く．

$X=\bigcup_{i\in I} u_i$ より $\bigcap_{i\in I}(X\setminus u_i)=\bigcap_{i\in I} s(b_i)=\varnothing$ である．つまり，$M=\{b_i \mid i\in I\}$ を含む A 上の超フィルターは存在しない．したがって，M は有限交叉性を持たないから，$i(1), \cdots, i(n)\in I$ で $b_{i(1)}\cdot\cdots\cdot b_{i(n)}=0$ となるものがある．よって，$a_{i(1)}+\cdots+a_{i(n)}=1$ だから，$u_{i(1)}\cup\cdots\cup u_{i(n)}=X$ である．

最後に，ブール空間 X とその開基 $s[A]$ に，補題 4.1.1 a）を適用して $s[A]=Clop(X)$ を得る． ▮

定理 4.1.2 により，定理 2.2.4 と命題 2.2.3 の前半とが再説される．つまり，A をブール代数，X をそのストーン空間とするとき，以下の命題が同値であることが分かる：

A は有限である；

X は有限である（$A\cong s[A]\subseteq P(X)$ だから）；

X は離散的である（X はコンパクト・ハウスドルフ空間だから）；

$Clop(X)=P(X)$；$s[A]=P(X)$（定理 4.1.2 による）；

ストーン写像 $s: A\to P(X)$ は上射である．

定理 4.1.2 により，すべてのブール代数は，（あるブール空間の）開閉ブール代数と同型になるが，逆に，すべてのブール空間は，あるブール代数のストーン空間と位相同型になることが次の定理から分かる．

4.1.3 定理 すべてのブール空間 X は，開閉ブール代数 $Clop(X)$ のストーン空間と位相同型になる．

証明 $A=Clop(X)$，$Y=St(A)$ と置き，写像 $\sigma: X\to Y$ を $x\in X$ に対し

$$\sigma(x)=\{a\in A \mid x\in a\}$$

で定義する．明らかに $\sigma(x)$ は A 上の超フィルターになるから，Y の元である．

σ は連続である：Y の開基の任意の元 $s(a)$，$a\in A$ の逆像が開集合であることを示せば十分であるが，これは $\sigma^{-1}(s(a))=a$ だからよい．

σ は1対1写像である：x と x' を X の異なる点とすれば，X がブール空間であることから，$x\in a$ かつ $x'\notin a$ となる $a\in A$ が存在する．このとき，$a\in\sigma(x)\setminus\sigma(x')$ となる．

σ は上射である：y を Y の点とする．つまり，y は $A=Clop(X)$ の超フ

ィルターであるとする．X がコンパクトで y が有限交叉的な X の閉集合の族であることから，$x\in\bigcap_{a\in y}a$ を満たす X の点 x が存在する．このとき，$y\subseteq\sigma(x)$ となるが，y と $\sigma(x)$ が A の極大フィルターであることから，$y=\sigma(x)$ が成り立つ． ▮

以下で，ブール代数とそのストーン空間のいくつかの関連性について考えてみよう．位相空間 X に対し，X の**重み** $w(X)$ を X の開基の濃度となる基数のうち最小のものとする．

4.1.4 命題 A を無限ブール代数とし，X をそのストーン空間とする．このとき，$w(X)=|A|$ が成り立つ．特に X は，A が可算なとき，かつ，このときに限り，距離付け可能になる．

証明 $s[A]$ は濃度 $|A|$ を持つ X の開基である．C を X のもう 1 つの開基として κ をその濃度とする．$\kappa<|A|$ を仮定して，それから矛盾が導かれることを示そう．各 $c\in C$ に対し $A_c\subseteq A$ を $c=\bigcup_{a\in A_c}s(a)$ となるように選び，$a\in A$ に対し $C_a\subseteq C$ を $s(a)=\bigcup C_a$ となるように選ぶ．また，$c\in C$ と $d\in\bigcup\{C_a\mid a\in A_c\}$ に対し $a_{cd}\in A$ を $d\subseteq s(a_{cd})\subseteq C$ となるように選ぶ．このとき，$s[A]$ の部分集合 $B_0=\{s(a_{cd})|c\in C,\ d\in\bigcup\{C_a|a\in A_c\}\}$ は，X の開基で $|B_0|\leqslant\kappa$ となる．B を $s[A]$ の B_0 によって生成された部分ブール代数とする．このとき，B は X の開基となり $B\subseteq s[A]=Clop(X)$ が成立するから，補題 4.1.1 a) により，$B=Clop(X)$ となるが，これは $|B|\leqslant\kappa<|A|$ に矛盾する．命題の後半は，コンパクト・ハウスドルフ空間が距離付け可能なのは，可算な開基を持つとき，かつ，そのときに限るという位相空間論の定理から導き出される． ▮

位相空間 X は，すべての X の開部分集合 u の閉包 u^h が開集合となるとき，つまり，X の正則開部分集合と開閉部分集合が一致するとき，**超不連結**であるという．

4.1.5 命題 A をブール代数，X をそのストーン空間とする．

a）A の部分集合 M は，$(\bigcup s[M])^h$ が X の開部分集合であるとき，かつそのときに限り，A で上限を持つ．

b）A は，X が超不連結であるとき，かつ，そのときに限り，完備になる．

証明　a)：$M \subseteq A$ は，$s[M]$ が $s[A]$ で上限を持つとき，かつ，そのときに限り，A で上限を持つ．一方，$a=(\bigcup s[M])^h$ は，$\bigcup s[M]$ を含む最小の閉集合だから，a が開集合なら，$a=\sum^{s[A]} s[M]$ となる．逆に，$s \in s[A]$ を $s[M]$ の上限とすると，$\bigcup s[M] \subseteq s$ だから，$a \subseteq s$ である．a が開集合でないとすると，$s \backslash a$ は空でない開集合となる．したがって，定理 4.1.2 により $u \in s[A]$ で $s \backslash a$ の空でない部分集合となるものがある．$s \backslash u$ は，開閉集合だから，s より真に小さな $s[M]$ の上界となるが，これは s が $s[M]$ の上限であることに矛盾する．b)：a) により明らかである．▮

4.1.6 命題　X をブール代数 A のストーン空間とするとき，$(s, RO(X))$ は A の完備化になる．

証明　ストーン写像 s は，A から完備ブール代数 $RO(X)$ の稠密な部分ブール代数 $Clop(X)$ への同型写像になる．▮

X を再びブール代数 A のストーン空間とする．このとき，A のイデアルの全体と X の開集合の全体の間に自然な全単射が存在する：A の任意のイデアル J に対し，

$$u(J)=\bigcup_{a \in J} s(a)$$

は X の開集合になる．また，X の任意の開集合 v に対し

$$I(v)=\{a \in A \mid s(a) \subseteq v\}$$

は A のイデアルとなる．更に，$I(u(J))=J$，$u(I(v))=v$ が成立する：$J \subseteq I(u(J))$ および $u(I(v)) \subseteq v$ は明らかである．逆に $b \in I(u(J))$ とすると，$s(b) \subseteq \bigcup_{a \in J} s(a)$ だが，$s(b)$ はコンパクトだから，J の有限個の元 $a_1, \cdots, a_n$ があって $s(b) \subseteq s(a_1) \cup \cdots \cup s(a_n)$ となる．したがって，$b \leqslant a_1 + \cdots + a_n$ となり，$b \in J$ である．また，$x \in v$ なら $a \in A$ で $x \in s(a) \subseteq v$ となるものがあるが，$a \in I(v)$ となるから，$x \in u(I(v))$ である．

写像 $J \mapsto u(J)$ および $v \mapsto I(v)$ は順序も保存するから，A のイデアルの全体の作る束と X の開集合全体の作る束の間の同型写像となる．同様に，A 上のフィルター F に集合 $\bigcap_{a \in F} s(a)$ を対応させ，X の閉部分集合 c にフィルター $\{a \in A \mid c \subseteq s(a)\}$ を対応させることにより，A 上のフィルター全体と

X の閉部分集合全体との間の双対同型が得られる．J がフィルター F の随伴イデアル $-F$ なら，F に対応する閉集合は，$X\backslash u(J)$ となる．また，A 上の超フィルター x は，X の閉部分集合 $\{x\}$ に対応する．c を X の閉部分集合，F をそれに対応する A 上のフィルターとするとき，A/F の双対空間は，c と位相同型になる： 写像 $p: A \to Clop(c)$ を $p(a)=s(a)\cap c$ で定義すると，補題 4.1.1 b) により，p は A から $Clop(c)$ への上射となり，$\{a\in A \mid p(a)=1\}=F$ だから，準同型定理により，$Clop(c)$ と A/F は同型になる．したがって，c と $St(A/F)$ は位相同型になる．

4.1 の演習問題

4.1.1 すべての $a\in A$ に対し $St(A\upharpoonright a)$ は $St(A)$ の部分空間 $s(a)$ と位相同型である．

4.1.2 演習問題 2.3.1 の自明でない方向をストーンの双対定理によって証明せよ．

4.1.3 a）$a\in A$ は，$s(a)$ が $St(A)$ の孤立点 $\{x\}$ となるとき，かつ，そのときに限り，原子元となる．

b）A は，$St(A)$ の孤立点の全体の集合が $St(A)$ で稠密となるとき，かつそのときに限り，原子的になる．

4.1.4 $\mathbf{2}=\{0,1\}$ を，ブール代数あるいは離散的位相空間の両方としてとらえることにする．A をブール代数として，X をブール空間とする．このとき，以下を示せ．

a）$Y=\{x\in \mathbf{2}^A \mid x$ はブール代数の準同型$\}$ とするとき，$f: St(A)\to Y,\ p\longmapsto \chi_p$ は $St(A)$ からカントル空間 2^A の閉部分空間への同型写像である．ただし，χ_p は p の特性関数とする．

b）$Z=\{x\in \mathbf{2}^X \mid x$ は連続$\}$ として，$g: Clop(X)\to Z,\ u\longmapsto \chi_u$ は，$Clop(X)$ から，ブール代数 $\mathbf{2}$ の直積（演算は要素ごとに行なう）の部分ブール代数への同型写像となる．

4.1.5 M を無限集合として A を M 上の有限-補有限ブール代数とする．このとき，$St(A)$ は離散位相で考えたときの M の一点コンパクト化になっていることを示せ．

4.2 準同型写像と連続写像に関する双対性

$\mathscr{A}$ をすべてのブール代数とブール準同型写像の作る圏とし，$\mathscr{T}$ をすべてのブール空間と連続写像の圏とする．反変関手 $T: \mathscr{A}\to\mathscr{T}$，$A: \mathscr{T}\to\mathscr{A}$ で，自然変換 $s: id_{\mathscr{A}}\to A\circ T$ および $\sigma: id_{\mathscr{T}}\to T\circ A$ の存在するようなものを以下で定義しよう．ブール代数 B とブール空間 X に対し，

$$T(B)=St(B),\ A(X)=Clop(X)$$

とする．ブール代数の準同型写像 $f:B\to C$ に対し，f に“双対な写像” $T(f)$ を

$$T(f):T(C)\to T(B),$$
$$T(f)(y)=f^{-1}[y],\ (y\in T(C))$$

で定義する．また，ブール空間の間の連続写像 $\varphi:X\to Y$ に対し，φ に“双対な写像” $A(\varphi)$ を

$$A(\varphi):A(Y)\to A(X),$$
$$A(\varphi)(b)=\varphi^{-1}[b],\ (b\in A(Y))$$

で定義する．C 上の超フィルター y に対し $f^{-1}[y]$ は B 上の超フィルターになり，Y の開閉集合 b に対し $\varphi^{-1}[b]$ は X の開閉集合となるから，上の定義は意味を持つ．

以下の証明では，次のことに注意しよう：$h:M\to N$ が任意の集合 M, N の間の写像であるとき，$h^*:P(N)\to P(M)$ を $h^*(y)=h^{-1}[y]$，$(y\in P(N))$ で定義すると，h は完備なブール代数の準同型となる．更に，h が上射のとき，h^* は1対1写像になる．

4.2.1 補題 f が準同型なら $T(f)$ は連続になる．また，φ が連続なら $A(\varphi)$ は準同型になる．

証明 s_B および s_C をそれぞれ B から $A((T(B))$ および C から $A(T(C))$ へのストーン写像とする．任意の $T(B)$ の開基の元 $s_B(b)$ の，$T(f)$ による逆像が $T(C)$ の開集合になることが示せれば十分だが，これは $c=f(b)$ とすれば，$T(f)^{-1}[s_B(b)]=s_C(c)$ となるからよい．$A(\varphi)$ がブール代数の準同型となることは，上の注意により明らかである． ▮

次の命題により，T と A は反変関手であることが分かる：

4.2.2 補題 a）すべてのブール代数 B に対し，$T(id_B)=id_{T(B)}$ となり，すべてのブール空間 X に対し，$A(id_X)=id_{A(X)}$ が成り立つ．

b）$f:B\to C,\ g:C\to D$ をブール代数からブール代数への準同型，$\varphi:X\to Y,\ \psi:Y\to Z$ をブール空間からブール空間への連続写像とする．このとき，

$$T(g\circ f)=T(f)\circ T(g),\ A(\psi\circ\varphi)=A(\varphi)\circ A(\psi)$$

が成り立つ．

証明　a）は明らかである．b）：$z\in T(D)$ とすれば，

$$T(g\circ f)(z)=(g\circ f)^{-1}[z]=f^{-1}[g^{-1}[z]]=(T(f)\circ T(g))(z)$$

となる．また，任意の $c\in A(Z)$ に対し，

$$A(\psi\circ\varphi)(c)=(\psi\circ\varphi)^{-1}[c]=\varphi^{-1}[\psi^{-1}[c]]=(A(\varphi)\circ A(\psi))(c)$$

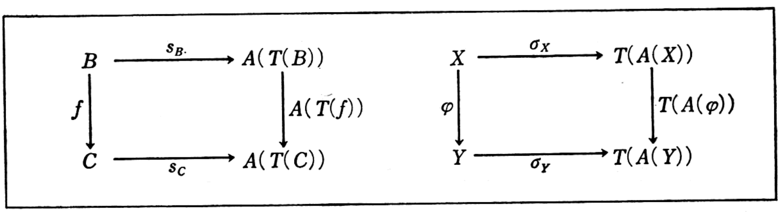
である．　▌

任意のブール代数 B に対し，定理 4.1.2 により，B から $A(T(B))$ への標準的な同型写像 s_B が定義される．また，任意のブール空間 X に対し，定理 4.1.3 の証明の中で，標準的な位相同型 $\sigma_X : X\to T(A(X))$ が，

$$\sigma_X(x)=\{a\in A(X)\mid x\in a\},\ (x\in X)$$

により定義された．$s=(s_B)_{B\in\mathfrak{B}}$ と $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_X)_{X\in\mathfrak{X}}$ は，自然変換である：

4.2.3 命題　すべてのブール代数からブール代数への準同型 $f: B\to C$ に対し，$A(T(f))\circ s_B=s_C\circ f$ が成り立つ．また，すべてのブール空間からブール空間への連続写像 $\varphi: X\to Y$ に対し，$T(A(\varphi))\circ\sigma_X=\sigma_Y\circ\varphi$ が成り立つ．



証明　$b\in B$ と $z\in T(C)$ に対し

$$\begin{aligned}
z\in A(T(f))(s_B(b)) &\Longleftrightarrow T(f)(z)\in s_B(b)\\
&\Longleftrightarrow f^{-1}[z]\in s_B(b)\\
&\Longleftrightarrow b\in f^{-1}[z]\\
&\Longleftrightarrow f(b)\in z\\
&\Longleftrightarrow z\in s_C(f(b))
\end{aligned}$$

$x\in X$ と $a\in A(Y)$ に対し

$$\begin{aligned}
a\in T(A(\varphi))(\sigma_X(x)) &\Longleftrightarrow A(\varphi)(a)\in\sigma_X(x)\\
&\Longleftrightarrow \varphi^{-1}[a]\in\sigma_X(x)
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow x\in\varphi^{-1}[a]$$
$$\Longleftrightarrow \varphi(x)\in a$$
$$\Longleftrightarrow a\in\sigma_Y(\varphi(x)) \quad \blacksquare$$

4.2.4 命題 $f: B\to C$ は，$T(f)$ が上射（単射）のとき，かつ，そのときに限り，単射（上射）になる．$\varphi: X\to Y$ は，$A(\varphi)$ が上射（単射）のとき，かつ，そのときに限り，単射（上射）になる．

証明 補題 4.2.1 の前の注意により，$T(f)$ あるいは $A(\varphi)$ は，f あるいは φ が上射のとき，単射となる．

f を単射とする．このとき，一般性を失うことなく，B が C の部分ブール代数で $f=id_B$ であると仮定してよい．$x\in T(B)$ とする．つまり，x は B 上の超フィルターである．このとき，C 上の超フィルター y で $x=B\cap y$ を満たすものの存在することがいえれば，$T(f)$ が上射であることが示せる．x は B，したがって C で有限交叉性を持つから，C 上の超フィルター y で $x\subseteq y$ を満たすものがある．$x\subseteq y\cap B$ となるが，x が B 上極大フィルターであることから，$x=y\cap B$ が成り立つ．

次に，φ を単射とする．上と同様に X が Y の閉部分空間で $\varphi=id_X$ と仮定してよい．a を X の開閉部分集合とする．このとき，Y の開閉部分集合で $a=b\cap X$ となるものの存在することがいえれば $A(\varphi)$ が上射であることが示せるが，このことは，補題 4.1.1 b) で既に証明されている．

残りの命題は，上で示されたことと，命題 4.2.3 および s_B，s_C，σ_X，σ_Y が双射であることから示せる．たとえば，$T(f)$ が上射なら，$A(T(f))$ は単射となり，このことから，f が単射であることが示せる． $\blacksquare$

B が濃度 κ を持つブール代数のとき，その双対空間 X は $P(B)$ の部分集合であるから，2^κ 個以上の元を持つことはあり得ない．B が有限で，たとえば 2^n 個の元を持つとき，その双対空間 X は，$B\cong P(X)$ だから，ちょうど n 個の元を持つ．これに対し B が無限のときには，以下のような命題が成り立つ．

4.2.5 命題 すべての無限ブール代数 B とその双対空間 X に対し $|B|\leqslant|X|$ が成立する．

証明 $|X|=\kappa<|B|$ と仮定してみよう．任意の2つの異なる B 上の超フィルター x, y に対し，b_{xy} を B の元で $b_{xy}\in x\backslash y$ となるものとする．すべての b_{xy}, $(x, y\in X,\ x\neq y)$ から生成された B の部分ブール代数 C は高々 κ 個の元しか持たないから，B の真部分ブール代数である．したがって，埋込み $i: C\to B$ は上射ではない．命題 4.2.4 により，これの双対写像 $T(i): T(B)\to T(C)$ は単射ではない．つまり，B 上の異なる超フィルター x, y で $x\cap C=y\cap C$ となるものがある．これは，しかし，$b_{xy}\in C$ に矛盾する． ▮

4.2 の演習問題

4.2.1 X と Y をブール空間として，$\varphi: X\to Y$ を連続写像とする．このとき，次のことを示せ：

a）φ が単射になるのは，任意のブール空間 S と連続写像 $\alpha, \alpha': S\to X$ に対し，$\varphi\circ\alpha=\varphi\circ\alpha'$ なら，$\alpha=\alpha'$ となるとき，かつこのときに限る．

b）φ が上射になるのは，任意のブール空間 T と連続写像 $\beta, \beta': Y\to T$ に対し，$\beta\circ\varphi=\beta'\circ\varphi$ なら，$\beta=\beta'$ となるとき，かつこのときに限る．

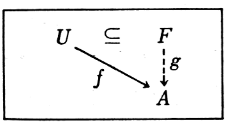
同様の命題をブール代数と同型写像に関し記述し，証明せよ．

4.2.2 A を B の部分ブール代数とし，$\varphi: St(B)\to St(A)$ を，$id_A: A\to B$ に双対な写像とする．このとき，以下の2つの命題が同値であることを証明せよ：

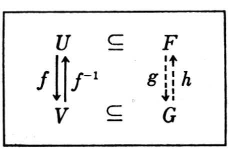
a）すべての $b\in B$ に対し，$b\leqslant a$ を満たす最小の $a\in A$ が存在する．

b）φ は開写像である．つまり，すべての開集合 $U\subseteq St(B)$ に対し，$\varphi[U]$ が $St(A)$ の開集合となる．

4.3 自由ブール代数



U をブール代数 F の部分集合とする．U から任意のブール代数 A への写像 f が，常に F から A への準同型に一意に拡張できるとき，F は U 上**自由**であるという．$U\subseteq F$ で F が U 上自由になるようなものがあるとき，F は**自由ブール代数**と呼ばれる．



4.3.1 補題 F を U 上自由で，G を V 上自由とする．f を U から V への双射とするとき，F から G への同型写像 g で f の拡張となっているものが一意に存在する．

証明　f の拡張となる準同型 $g: F \to G$ が一意に存在することは，明らかである．準同型 $g: F \to G$, $h: G \to F$ をそれぞれ f および f^{-1} の拡張となっているものとする．$h \circ g = id_F$ と $g \circ h = id_G$ が示せればよいが，id_F と $h \circ g$ は共に F から F への準同型で $f^{-1} \circ f = id_U$ の拡張で，F は U 上自由だから $h \circ g = id_F$ がいえる．$g \circ h = id_G$ についても同様である．∎

ブール代数 A の部分集合 U は，任意の2つの互いに素な U の有限部分集合 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ と $\{y_1, \cdots, y_m\}$ 上の初等積 $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \cdot -y_1 \cdot \cdots \cdot -y_m$ が常に 0_A と異なるとき，**独立**であるという．

4.3.2 補題　ブール代数 F は，その部分集合 U が独立な F の生成系であるとき，かつ，そのときに限り，U 上自由となる．

証明　U を F の独立な生成系とする．f と A を上の定義でのようにとるとき，f の拡張 g が一意に存在することは，補題 3.2.1 から直ちにわかる．

逆に，F が U 上自由であるとしよう．F の U から生成された部分ブール代数 F_0 が F の真部分ブール代数なら，命題 4.2.5 の証明でのように，F 上の異なる超フィルター x, y で $x \cap F_0 = y \cap F_0$ となるものが存在する．$A = \mathbf{2}$ として，$g_x: F \to A$ を

$$g_x(a) = \begin{cases} 1, & a \in x \text{ のとき} \\ 0, & a \notin x \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義される準同型とし，$g_y: F \to A$ を y によって同様に定義するとき，g_x と g_y は明らかに異なるが，$U \subseteq F_0$ 上では一致から，矛盾である．

U が独立でないとすれば，U の互いに異なる元 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m$ で $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n \cdot -y_1 \cdot \cdots \cdot -y_m = 0$ となるものがある．f を U から $\mathbf{2}$ への写像で，すべての x_i を1に移し，すべての y_i を0に移すようなものとすれば，補題 3.2.1 により，f は F から $\mathbf{2}$ への準同型に拡張できない．∎

F が U 上自由であるとき，補題 4.3.2 により，U のことを F の**自由生成系**と呼ぶ．

4.3.3 定理　すべての基数 κ に対し，濃度 κ の自由生成系を持つブール代数 F が存在する．F の双対空間は，$|I| = \kappa$ として，カントル空間 2^I に位相

同型となる.

証明 I を濃度 κ の任意の集合とする. F を 2^I の開閉ブール代数とし, U を $U=\{u_i \mid i\in I\}$ で定義しよう. ここに, $u_i=\{x\in 2^I \mid x(i)=1\}$ とする. i と j が異なる元 I であるとき, 明らかに $u_i \neq u_j$ となるから, $|U|=\kappa$ である. U は F の独立な部分集合である: $\{i(1), \cdots, i(n)\}$ と $\{j(1), \cdots, j(m)\}$ を I の互いに素な有限部分集合とするとき, $x\in 2^I$ で $1\leqslant k\leqslant n$, $1\leqslant l\leqslant m$ に対し, $x(i(k))=1$, $x(j(l))=0$ となるものをとれば, $x\in u_{i(1)}\cap\cdots\cap u_{i(n)}\setminus(u_{j(1)}\cup\cdots\cup u_{j(m)})$ となるからである. 更に, F の U から生成された部分ブール代数 F_0 は F と等しくなる: $U\cup -U$ は 2^I の準基だが, 補題 4.1.1 a) により, $F_0=Clop(2^I)=F$ となるからである.

したがって, 補題 4.3.2 により, F は U 上自由となり, 定理 4.1.3 により, F の双対空間は 2^I と位相同型になる. ∎

補題 4.3.1 と定理 4.3.3 により, 任意の基数 κ に対し濃度 κ の生成系上の自由ブール代数 F が同型を除いて一意に存在することが分かる. 無限な κ に対して, F は濃度 κ を持ち, 有限な κ に対しては, $\kappa=n\in\boldsymbol{N}$, $m=2^n$ として F はちょうど 2^m 個の元を持つ. F の双対空間は, 2^n 個の元を持ち, 離散的だからである.

4.3.4 系 高々 κ 個の元を持つ任意のブール代数は, 濃度 κ の生成系を持つ自由ブール代数の準同型写像による像となる. 重みが高々 κ であるようなブール空間は, カントル空間 2^κ の部分空間と同型である.

証明 A を $|A|\leqslant\kappa$ となる任意のブール代数とする. $|U|=\kappa$ として, F を U 上の自由ブール代数とする. f を任意の U から A の上への写像とする. f の拡大 g で F から A への準同型となるものをとれば, g は上射となる.

次に, X をブール空間で $w(X)\leqq\kappa$ となるものとする. κ が有限なら, 主張は自明である. このときには, X と積空間 2^κ は離散的になり, $|X|=w(X)\leqslant\kappa<2^\kappa$ だからである. κ が無限のときには, A を X の双対ブール代数とする. 命題 4.1.4 により, $|A|\leqslant\kappa$ である. F と上射 $g:F\to A$ を上と同じようにとると, g と双対な写像は, $St(A)$ から $St(F)$ への埋込みとなるが, 前者は X と, 後者は 2^κ と位相同型である. ∎

任意の無限ブール代数 A とその双対空間 X に対し，命題 4.2.5 により，$|A|\leqslant|X|\leqslant 2^{|A|}$ が成り立つ．A が U 上自由で $|A|=\kappa$ なら，A は U から生成されるから，$|U|=\kappa$ である．このとき，双対空間 X は，カントル空間 2^κ と同型になり，濃度 2^κ を持つ．より一般には，次の補題が成り立つ．

4.3.5 補題 A をブール代数として，F を自由な A の無限・部分ブール代数で濃度 κ を持つものとする．このとき，A の双対空間は，少なくとも濃度 2^κ を持つ．

証明 F の A への埋込みは単射だから，その双対写像は $St(A)$ から $St(F)$ への上射となるが，$St(F)$ の濃度は 2^κ である． ▮

最後に，大きな自由・部分ブール代数を持つブール代数と，小さな自由・部分ブール代数しか持たないブール代数の例を挙げよう．

4.3.6 命題 A を濃度 κ の集合とする．このとき，巾集合代数 $P(A)$ は濃度 $\lambda=2^\kappa$ の自由な部分ブール代数を持ち，$P(A)$ 上 2^λ 個の超フィルターが存在する．

証明 A は濃度 κ の自由生成系を持つ自由ブール代数であるとしてよい．U を A 上の超フィルターの全体とする．$U\subseteq P(A)$ で $|U|=2^\kappa$ である．命題 2.3.1 により，U は独立であるから，U によって生成される $P(A)$ の部分ブール代数は自由である．したがって，補題 4.3.5 により $|St(P(A))|\geqslant 2^\lambda$ が成立する．一方，$|P(A)|=\lambda$ であるから，$|St(P(A))|\leqslant 2^\lambda$ は明らかである． ▮

4.3.7 命題 区間ブール代数の独立な部分集合はすべて可算である．

証明 $(X,<)$ を最小元を持つ全順序集合として，A を X 上の区間ブール代数とする．練習問題 2.1.1 で示されたように，A のすべての元 a に対し，標準表現 $a=[x_1,y_1)\cup\cdots\cup[x_n,y_n)$ が存在する．ここで，$n\in N$ と，$x_1<y_1<\cdots<x_n<y_n$ は a に対し一意に決まる．n を a の長さと呼ぼう．

U を A の独立な部分集合とし，各 $n\in N$ に対し U_n を $u\in U$ で長さ n を持つものの集合としよう．U は U_n, $n\in N$ の和集合となるが，以下の主張（*）により，各 U_n は有限となるから，U は可算であることが分かる：

（*） $V=\{u_1,\cdots,u_k\}$ は独立で，各 u_j は長さ n を持つとき，$2^{k-1}/k$

$\leqslant n$ が成り立つ.

(＊) の証明：k と n を (＊) でのようにとり，$u_j=[x_1{}^j, y_1{}^j)\cup\cdots\cup[x_n{}^j, y_n{}^j)$ を，u_j の標準表現とする．このとき，集合 $X_0=\{x_i{}^j \mid 1\leqslant j\leqslant k,\ 1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{y_i{}^j \mid 1\leqslant j\leqslant k,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ は高々 $2kn$ 個の元しか持たない．$\varphi(a)=a\cap X_0$ で定義される写像 $\varphi: A\to P(X_0)$ は，準同型となり，$a\in[V]$ は，$a\neq 0$ なら X_0 に端を持つ区間の和集合だから，$\varphi(a)\neq 0$ となり，$\varphi\restriction[V]$ は同型写像になっていることが分かる．したがって，$m=2^k$ として，$|[V]|=2^m=|P(X_0)|\leqslant 2^{2kn}$ が成り立ち，$2^k\leqslant 2kn$ となるから，$2^{k-1}/k\leqslant n$ である． ▮

4.3 の演習問題

4.3.1 I を任意の集合とする．演習問題 3.1.4 を用いて，ブール代数 F で $|U|=|I|$ を満たす部分集合 U 上自由なものが存在することを示せ．

4.3.2 B を完備なブール代数として，ある無限基数 κ に対し，$|B|\leqslant 2^\kappa$ が成り立っているとする．このとき，$P(\kappa)$ から B への上射が存在することを示せ．

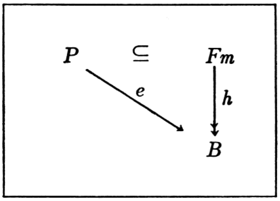
4.3.3 F を U 上の自由ブール代数とする．$V\subseteq U$ に対し，$X_V=V\cup\{-u \mid u\in U\setminus V\}$ とする．以下を示せ．

a) F 上の超フィルター p_V で $X_V\subseteq p_V$ となるものが一意に存在する．

b) すべての F 上の超フィルター p に対し，$V\subseteq U$ が一意に決まり，$p=p_V$ となる．

c) p, q を F 上の任意の超フィルターとするとき，F 上の自己同型 f で $f[p]=q$ となるものが存在する．

4.3.4 (数理論理学の知識を持っている読者のための自由ブール代数の構成法) Fm を，命題変数の集合 P から論理記号 $\vee, \wedge, \neg$ によって作られる命題論理の論理式の全体の集合とする．$\alpha, \beta\in Fm$ に対し $\alpha\sim\beta$ を α と β が命題論理で同値になること (たとえば，適当な論理体系で，$(\alpha\wedge\beta)\vee(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$ が証明されること) と定義する．$\alpha\in Fm$ に対し，$h(\alpha)=\{\beta\in Fm|\alpha\sim\beta\}$，$B=\{h(\alpha) \mid \alpha\in Fm\}$ とする．



a) $h(\alpha)\cdot h(\beta)=h(\alpha, \beta)$, $h(\alpha)+h(\beta)=h(\alpha\vee\beta)$, $-h(\alpha)=h(\neg\alpha)$, $0=h(\alpha\wedge\neg\alpha)$, $1=h(\alpha\vee\neg\alpha)$ により B 上の演算を定義することができて，B はこれらの演算によりブール代数になる．

b) $e=h\restriction P$ とすると，e は単射となり，B は $e[P]$ 上自由になる．

上のようにして構成されたブール代数は，**リンデンバウム・タルスキー代数**と呼ばれる．

第5章　超原子的ブール代数，可算ブール代数

この章では，比較的よく研究されている2つのブール代数のクラスである超原子的ブール代数および可算ブール代数について考察する．これらのクラスに属する無限ブール代数は，完備でなく，σ-完備ですらない．これに対して，第6章以降では，高い完備度を持つブール代数が主に考察される．

5.1　超原子的ブール代数

まず 2.2 のいくつかの定義を復習しよう：ブール代数 A の元 a は，$a>0$ で $0<b<a$ となる $b\in A$ が存在しないとき，A の原子元と呼ばれた．A は，A の原子元の全体の集合 $At(A)$ が A で稠密なとき，原子的と呼ばれ，$At(A)$ が空集合のとき，無原子的と呼ばれた．自明なブール代数は，原子的かつ無原子的であり，2元ブール代数は原子的である．すべての自明でない無原子的ブール代数は無限個の元を持つ．A の原子元の全体から生成されるイデアルを $I(A)$ で表わそう．$I(A)$ の元は有限個の原子元の上限である．

これらの概念を位相空間論に翻訳すると次のようになる：X を A のストーン空間としよう．A の元 a が A の原子になるのは，$s(a)$ が $s[A]=Clop(X)$ の原子になるとき，つまり，x を X の孤立点として，$s(a)$ が，$\{x\}$ の形をしているときである．したがって，A の原子は，X の孤立点に対応する．よって，A が無原子的となるのは，X が孤立点を持たないときであり，原子的となるのは，X の孤立点の集合 $Is(X)$ が X で稠密なとき，つまり，X が離散空間 $Is(X)$ のコンパクト化となるときである．$Is(X)$ はイデアル $I(A)$ と双対な X の開集合であるから，$A/I(A)$ の双対空間は $X'=X\setminus Is(X)$ と

位相同型になる．X' は，X の**カントル・ベンディクソン導集合**と呼ばれる．

例 5.1.1　$(X,<)$ を最小元を持つ全順序集合で稠密（つまり，$x<y$ となる任意の $x,y\in X$ に対し $x<z<y$ となる $z\in X$ が存在するようなもの）であるとするとき，$(X,<)$ の区間ブール代数は，無原子的である．　▮

例 5.1.2　I を無限集合とするとき，カントル空間 2^I は孤立点を持たない．したがって，すべての無限自由ブール代数は無原子的である．　▮

例 5.1.3　ρ を非極限順序数とし，$\rho=\mu+1$ とする．ρ が ρ 以下の順序数全体の集合として定義されているという立場から，区間 $\rho=[0,\mu]$ とその上の自然な順序による位相 $\mathcal{O}$ を考える．位相空間 $(\rho,\mathcal{O})$ は，ρ の任意の部分集合が上限と下限を持つことから，コンパクト・ハウスドルフ空間になる．$0\leqslant\gamma<\delta\leqslant\mu$ で γ が極限数でないとき，区間 $[\gamma,\delta]$ は，開閉集合となり，このような区間の全体は開基となっている．したがって，$(\rho,\mathcal{O})$ はブール空間である．この空間の孤立点の全体は，ρ の非極限数の全体と一致し，ρ の稠密な部分集合となる．同様に，最大元を持つ整列集合 $(Y,\leqslant)$ は順序位相によりブール空間となり，その孤立点の全体は Y で稠密になる．Y が $(\rho,\mathcal{O})$ の閉部分空間のとき，Y 上 ρ から誘導された相対位相と Y の順序による順序位相とは一致する．Y は整列集合だから，Y でも孤立点の全体は稠密になっている．$(\rho,\mathcal{O})$ の双対ブール代数が，$[0,\mu)$ の区間ブール代数になっていることは，容易に示せる．　▮

ブール代数 A は，A の準同型による像が常に原子的であるとき，**超原子的**であるという．双対空間で考えると，このことは，すべての閉部分空間で，孤立点の集合が稠密になることを意味する．このような性質を持つ空間を**分散的**であるという．たとえば，例 5.1.3 の位相空間の双対ブール代数は超原子的である．無限集合 X に対し，巾集合代数 $P(X)$ は原子的であるが，$P(X)/I(P(X))$ は無原子的であるから，超原子的ではない．次に，超原子的ブール代数の特徴づけに必要となる2つの補題を述べよう．

5.1.1 補題　A をブール代数，p を A からブール代数 Q への全射とする．$a,b\in A$ とし，$y\in Q$ が $p(a)\leqslant y\leqslant p(b)$ を満たすとき，$x\in A$ で $a\leqslant x\leqslant b$，$p(x)=y$ となるものが存在する．

証明 $p(x')=y$ となる x' をとり，$x=b\cdot x'+a$ とすればよい． ▮

B が A の部分ブール代数で，I が A のイデアルであるとする．$I\cap B=\{0\}$ となるとき，I は B と**素である**という．更に，I を真に含むイデアル J で B と素になるものがないとき，I は B と**極大に素**であるという．ツォルンの補題により，B と素な任意のイデアルは，B と極大に素なイデアルに拡大できる．

5.1.2 補題 B を A の部分ブール代数とし，I を A のイデアルとする．更に，π を A から A/I への自然な写像とする．このとき，

a）I は，π の B への制限が単射であるとき，かつそのときに限り，B と素になる．

b）I は B と素であるとする．このとき，I は，$\pi[B]$ が A/I の稠密な部分ブール代数となるとき，かつ，そのときに限り，B と極大に素となる．

$$\begin{array}{ccc} B & \subseteq & A \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi\restriction B} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \pi[B] & \subseteq & A/I \end{array}$$

証明 a)：以下の命題は同値になる：$\pi\restriction B$ は単射でない；$b>0$ かつ $\pi(b)=0$ となる $b\in B$ が存在する；$b>0$ かつ $b\in I$ となる $b\in B$ が存在する．

b)：I を B と極大に素であるとして，$a\in A$ が $\pi(a)>0$ を満たす，つまり，$a\notin I$ とする．$I\cup\{a\}$ から生成されるイデアル J は，B と素でないから，$b\in B$ で $b>0$, かつ $b\in J$, つまり，ある $i\in I$ に対し $b\leqslant i+a$ となるようなものが存在する．このとき，$0<\pi(b)\leqslant\pi(a)$ が成立するから，$\pi[B]$ は A/I で稠密になっていることが分かる．

逆に，$\pi[B]$ が A/I の稠密な部分ブール代数であるとしよう．$a\in A\backslash I$ として，$I\cup\{a\}$ から生成されるイデアル J が B と素でないことを示す．$\pi(a)>0$ だから，$b\in B$ で $0<\pi(b)\leqslant\pi(a)$ となるものが存在する．$\pi(b)\leqslant\pi(a)$ より，$i=b\cdot -a$ は I の元となるから，$b\leqslant a+i$ により b は J の元であることが分かる． ▮

次の命題の証明では，“B がブール代数 A の稠密な部分ブール代数のとき，A の原子元と B の原子元は一致する．特に，B が原子的，あるいは無原子的なら A もそうである” ということに留意しよう．

5.1.3 命題　自明でないブール代数 A に対し以下の a)〜d) は同値である：

a）すべての自明でない A の準同型写像による像は原子的である．つまり，A は超原子的である．

b）A のすべての部分ブール代数は原子的である．

c）A のすべての部分ブール代数は原子元を持つ．

d）A のすべての準同型写像による自明でない像は原子元を持つ．

証明　自明でない命題についてはすべて背理法で証明する．

a)⇒b)：B を A の原子的でない部分ブール代数とする．I を B と極大に素なイデアルとする．補題 5.1.2 により，$\pi[B]$ は A/I の稠密な部分ブール代数で B と同型になる．したがって，A/I は原子的でない．

b)⇒c)：A の部分ブール代数は自明でないから明らかである．

c)⇒d)：$p: A \to Q$ を A から自明でない無原子的ブール代数 Q への上射とする．$n \in N$ に対し A の部分ブール代数 A_n を，

$A_n \subseteq A_{n+1}$,

A_n は有限で，ちょうど 2^n 個の原子元を持つ，

A_n のすべての原子元 a に対し，$p(a)>0$ が成り立つ，

A_n の原子元は，A_{n+1} の異なる2つの原子元の和として表わされる，

ようにとれれば，部分ブール代数 A_n, $n \in N$ の和は A の無原子的部分ブール代数となるからよい．A_n, $n \in N$ は以下のように構成できる．A_0 を，A の2元部分ブール代数とする．A_n が既に定義されたとき，A_n の原子元 a に対し A の元 x_a, y_a で $x_a \cdot y_a=0$, $x_a+y_a=a$, $p(x_a)>0$, $p(y_a)>0$ となるものがあることが示せればよい．A_{n+1} は，このとき，$\{x_a \mid a \in At(A_n)\} \cup \{y_a \mid a \in At(A_n)\}$ の生成する A の部分ブール代数として定義できるからである．仮定により $p(a)>0$ で，Q は無原子的であるから，$z \in Q$ で $0<z<p(a)$ となるものがある．補題 5.1.1 により，$x_a \in A$ で $x_a \leqslant a$ かつ $p(x_a)=z$ となるものがある．$y_a=a \cdot -x_a$ と定義する．$p(y_a)=0$ なら，$p(a) \leqslant p(x_a)=z$ となるから，矛盾する．したがって，$p(y_a)>0$ である．

d)⇒a)：$p: A \to Q$ を，A から，自明でなく原子的でもないブール代数 Q への上射とする．$q \in Q$, $q>0$ で $Q \upharpoonright q$ が Q の原子元を含まないようなものをとると，$Q \upharpoonright q$ は，Q の自明でない準同型写像による像だから，A の自

明でない準同型写像による像でもあり，無原子的である． ∎

A を任意のブール代数として，α を順序数とする．α に関する帰納法により，イデアル $I_\alpha(A)$ あるいは略記して I_α を以下のように定義し，$A_\alpha=A/I_\alpha$ と置き，$\pi_\alpha: A\to A_\alpha$ を自然な写像とする：

$$I_0=\{0\},$$

$$I_{\alpha+1}=\pi_\alpha{}^{-1}(I(A_\alpha)),$$

$$I_\lambda=\bigcup_{\alpha<\lambda} I_\alpha \quad (\lambda \text{ が極限数のとき}).$$

明らかに $I_\alpha\subseteq I_{\alpha+1}$ がすべての順序数 α に対し成り立つから，$\alpha<\beta$ なら，$I_\alpha\subseteq I_\beta$ となる．A が集合であるのに対し，順序数の全体はクラスであるから，$I_\nu=I_{\nu+1}$，つまり A_ν が無原子的になるような最小の順序数 ν が存在する．

このことを双対空間で考えると，I_α に対応する X の開集合 $u(I_\alpha)$ に対し，閉集合 $X_\alpha=X\backslash u(I_\alpha)$ は α に関して下降列を作る．ここで，

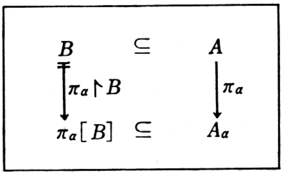
$$X_0=X,$$

$$X_{\alpha+1}=(X_\alpha)'=X_\alpha\backslash Is(X_\alpha),$$

$$X_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \quad (\lambda \text{ が極限数のとき})$$

である．X_α は $A_\alpha=A/I_\alpha$ の双対空間と位相同型になる．したがって，$I_\nu=I_{\nu+1}$ は $X_\nu=X_{\nu+1}$，つまり，X_ν が孤立点を持たないことを意味する．

5.1.4 命題 A を自明でないブール代数とし，ν を $I_\nu=I_{\nu+1}$ となる順序数とする．A は，A_ν が自明なブール代数であるとき，かつ，そのときに限り，超原子的となる．



証明 A が超原子的なら，A_ν は A の準同型写像による像で，無原子的だから，自明なブール代数でなければならない．逆に，A が超原子的でなければ，命題 5.1.3 により，A は無原子的な部分ブール代数 B を持つ．帰納法により，すべての順序数 α に対し，I_α が B と素であることを示そう——これと補題 5.1.2 a) により，A_α は，B と同型な部分ブール代数を含むから，自明でないことが分かる：$\alpha=0$ のとき，上の主張は明らかである．また λ が極限数で，すべての $\alpha<\lambda$ に対し上の主張が成り立つなら，λ に対しても成り立つことも容易に示せる．さて，I_α を B と素であ

るとしよう．このとき，$\pi_\alpha \upharpoonright B$ は補題 5.1.2 a) により，単射である．$b \in B$ を $b>0$ とすると，$\pi_\alpha(b)$ は 0 と異なる無原子的ブール代数 $\pi_\alpha[B]$ の元となる．

したがって，$A_\alpha \upharpoonright \pi_\alpha(b) \supseteq \pi_\alpha[B] \upharpoonright \pi_\alpha(b)$ は無限になる．特に $\pi_\alpha(b)$ は，A_α の有限個の原子元の和とはなり得ない．このことは，$\pi_\alpha(b) \notin I(A_\alpha)$ を意味するから，$b \notin I_{\alpha+1}$ がいえる． ▮

自明でない超原子的ブール代数 A に対し，ν を $I_\nu = I_{\nu+1}$ となる最小の順序数とする．ν は，A_ν が自明になる，つまり，双対空間 X_α が空になる最小の順序数である．$(X_\alpha)_{\alpha \leqslant \nu}$ は，コンパクトな位相空間の閉集合の下降列であるから，ν は極限数であり得ない．したがって ν は，ある一意に決まる順序数 α に対し，$\alpha+1$ という形をしているが，この α を $\alpha(X)$ あるいは，$\alpha(A)$ で表わす．$X_{\alpha(X)} \neq \varnothing$ だが，$X_{\alpha(X)+1} = \varnothing$ となる．つまり，$X_{\alpha(X)}$ のすべての点は孤立点である．したがって，$X_{\alpha(X)}$ は，コンパクトな離散空間となるから，有限である．$X_{\alpha(X)}$ の要素の数を $n(X)$ あるいは，$n(A)$ で表わすことにする．$1 \leqslant n(X) < \omega$ である．任意の順序数 α と自然数 $n, n \geqslant 1$ に対し，$\alpha(A) = \alpha$, $n(A) = n$ となる超原子的ブール代数 A が存在する．例 5.1.3 で，$\mu = \omega^\alpha \cdot n$（ここで・と巾は，順序数での演算を意味する）と置けば，計算により，$X = [0, \mu]$ と双対なブール代数が上の等式を満たすことが分かる．

超原子的ブール代数 A に対し，

$$(c_\alpha \mid \alpha \leqslant \alpha(A)), \qquad c_\alpha = |At(A_\alpha)|$$

を A の**基数列**と呼ぶ．$c_{\alpha(A)} = n(A) < \omega$ で，$\alpha < \alpha(A)$ に対し，c_α は無限基数となる．$\alpha < \alpha(A)$ に対し，$c_\alpha = n < \omega$ とすれば，X_α は n 個の元を持つ離散空間となり，$X_{\alpha+1} = \varnothing$ となってしまうからである．超原子的ブール代数の基数列の全体に関しては，まだ分かっていないことが多い．後に，$\alpha(A) = 2$ で，基数列 $(\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 1)$ を持つ超原子的ブール代数の例（例 5.1.4）を挙げるが，まず，このために必要となる組合せ論からの準備をしよう．

可算無限集合の2つの部分集合は，その共通部分が有限なとき，**ほとんど素**であるという．

5.1.5 補題 任意の可算無限集合 X は，$2^{\aleph_0}$ 個の互いにほとんど素な部分

集合を持つ.

証明 集合 X は可算無限であれば任意にとってよいから，有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ とする．任意の実数 a に対し $(x_{an})_{n\in\boldsymbol{N}}$ を有理数の真の上昇列で a に収束するものとし，$X_a=\{x_{an}\mid n\in\boldsymbol{N}\}$ とする．a と b とが異なる実数で，たとえば $a<b$ とすれば，$N\in\boldsymbol{N}$ で，すべての $n>N$ に対し $x_{bn}>a$ となるものがとれる．したがって，この N に対し，$X_a\cap X_b\subseteq\{x_{b0},\cdots,x_{bN}\}$ となり，$X_a\cap X_b$ は有限である． ▮

例 5.1.4 D を可算無限集合 X の互いにほとんど素な部分集合からなる集合で $|D|=2^{\aleph_0}$ とする．A を $P(X)$ の D と X の有限集合全体から生成された部分ブール代数とする．A の原子元は，有限集合である．また，$A_1=A/I(A)$ では，すべての $d\in D$ に対し $\pi_1(d)$ は原子元となり，このような原子元の全体は A_1 の生成系になっているから，A_2 は2元ブール代数となる． ▮

A を無限ブール代数，X をその双対空間とするとき，4.2 により，$|A|\leqslant|X|\leqslant 2^{|A|}$ が成り立つ．A が超原子的なときには，$|X|$ はこの不等式での最小値になる：

5.1.6 命題 A が超原子的無限ブール代数で，X が A の双対空間であるとき，$|X|=|A|$ となる．

証明 $\kappa=|A|$ として $|X|\leqslant\kappa$ を示す．まず，$(I_\alpha(A))_{\alpha\leqslant\alpha(A)}$ はAの部分集合の真の下降列だから，$|\alpha(A)|\leqslant\kappa$ である．すべての $\alpha\leqslant\alpha(A)$ に対し，$X_\alpha\setminus X_{\alpha+1}=Is(X_\alpha)$ で，A_α が A の準同型写像による像であることから，$|Is(X_\alpha)|=|At(A_\alpha)|\leqslant|A_\alpha|\leqslant|A|=\kappa$ となる．したがって，$X=\bigcup_{\alpha\leqslant\alpha(A)}(X_\alpha\setminus X_{\alpha+1})$ により，$|X|\leqslant\kappa\cdot\kappa=\kappa$ となる． ▮

5.1 の演習問題

5.1.1 すべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対し，X_n を空でない分散的なブール空間で，$\alpha(X_0)<\alpha(X_1)<\alpha(X_2)<\cdots$ を満たし，互いに素であるようなものとする．$X=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}X_n$ 上の位相 $\mathcal{O}$ を，

$u\in\mathcal{O}\Longleftrightarrow$ すべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対し $u\cap X_n$ は X_n の開集合

で定義する．このとき，$(X,\mathcal{O})$ は局所コンパクトで0次元となり，X の一点コンパク

ト化 $(Y, \mathcal{O}')$ は分散的なブール空間となる．また，

$$\alpha(Y)=\sup\{\alpha(X_n)\mid n\in\boldsymbol{N}\},\qquad n(Y)=1$$

が成り立つ．このことを示せ．

5.1.2　すべての位相空間に対し，次は同値である：

a）X のすべての部分空間は孤立点を持つ

b）X のすべての閉部分空間は孤立点を持つ．

5.1.3　A をブール代数として，r を A から順序数のクラスへの写像とする．r は，以下の条件を満たすとき，**階数関数**と呼ばれる．

（i）　$a, a'\in A$ で $a'\leqslant a$ なら，$r(a')\leqslant r(a)$

（ii）　$a, a_1, a_2\in A\setminus\{0_A\}$ で，$a=a_1+a_2$，$a_1\cdot a_2=0$ なら，$r(a_1)<r(a)$ かつ $r(a_2)<r(a)$ である．

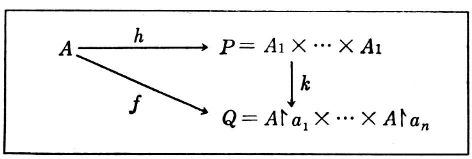
A が階数関数を持つのは，A が超原子的であるとき，かつ，そのときに限ることを示せ．

5.2　可算ブール代数

$A_1, \cdots, A_n$ がブール代数のとき，直積集合 $A_1\times\cdots\times A_n$ は，成分ごとの演算により，再びブール代数になる．ブール代数の有限個の因子の直積への分解に対しては，補題 5.2.1 により簡単な記述が得られる．無限個の因子の直積への分解に関する類似の定理は，7.1 で与えられる．以下に述べるヴォートの定理により，2つの可算ブール代数は，同じように因子の直積に分解できるとき，同型になる．この定理は，可算ブール代数が同型であることを示すときの標準的な証明手段を与える．

5.2.1 補題　$a_1, \cdots, a_n$ をブール代数 A の互いに素な元で，$a_1+\cdots+a_n=1$ が成り立つものとする．このとき，A は相対ブール代数 $A{\upharpoonright}a_i$ の積 $A{\upharpoonright}a_1\times\cdots\times A{\upharpoonright}a_n$ と同型になる．逆に，任意の A の n 個の因子の積への分解は，この形の積と同型になる．

証明　$f(x)=(x\cdot a_1, \cdots, x\cdot a_n)$，および $g(y_1, \cdots, y_n)=y_1+\cdots+y_n$ で定義される写像，$f: A\to A{\upharpoonright}a_1\times\cdots\times A{\upharpoonright}a_n$，および $g: A{\upharpoonright}a_1\times\cdots\times A{\upharpoonright}a_n\to A$ は，互いに逆写像になっており，単調である．



したがって，半順序集合 $(A, \leqslant)$ と $(A\upharpoonright a_1\times\cdots\times A\upharpoonright a_n, \leqslant)$ の間の同型写像となる．逆に h を A からブール代数 $A_1,\cdots,A_n$ の積 P への同型写像とする．$1\leqslant i\leqslant n$ に対し，p_i を P の元で $p_i(i)=1$，$j\neq i$ なら $p_i(j)=0$ を満たすものとし，a_i を p_i の h による逆像とする．このとき，a_i, $1\leqslant i\leqslant n$ は互いに素で，$a_1+\cdots+a_n=1$ が成り立つ．f を上と同じように定義して，$k=f\circ h^{-1}$ とすると，k は P から $Q=A\upharpoonright a_1\times\cdots\times A\upharpoonright a_n$ への同型写像となり，A_i と同型な $P\upharpoonright p_i$ を $Q\upharpoonright q_i$ にうつし，後者は $A\upharpoonright a_i$ と同型になる．ここで，q_i は，Q の元で $q_i(i)=1$，$j\neq i$ なら $q_i(j)=0$ を満たすものである． ▮

A の双対空間 X では，補題 5.2.1 におけるような積への分解 $A\cong A\upharpoonright a_1\times\cdots\times A\upharpoonright a_n$ は X の n 個の互いに素な開閉集合への分解 $X=s(a_1)\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}s(a_n)$ に相当する．

可算ブール代数のクラスの上の関係 $\sim$ は，すべての可算ブール代数 A,B に対し

$A\sim B$ なら $B\sim A$,

$A\sim B$ で A が自明なら B は自明,

$A\sim B$ で $a\in A$ なら $b\in B$ があって $A\upharpoonright a\sim B\upharpoonright b$ かつ $A\upharpoonright -a\sim B\upharpoonright -b$,

を満たすとき，**ヴォート関係**と呼ばれる．

5.2.2 定理（ヴォートの定理） $\sim$ が可算ブール代数の全体のクラス上のヴォート関係で，2つの可算ブール代数 A,B に対し $A\sim B$ が成り立つとき，A と B とは同型になる．

証明 $\sim$ をヴォート関係として，$A\sim B$ とする．$a\in A$, $b\in B$ に対し，$A\upharpoonright a\sim B\upharpoonright b$ を $a\sim b$ と略記することにする．A と B の元の枚挙

(1) $A=\{a_{2n+1} \mid n\in \boldsymbol{N}\}$, $B=\{b_{2n+2} \mid n\in \boldsymbol{N}\}$

を選んで固定しておく．このとき，順々に，$b_1\in B$, $a_2\in A$, $b_3\in B$, $a_4\in A$, $\cdots$ を $n\in \boldsymbol{N}$ に対し

$(*)_n$ 各 $e\in E_n$ に対し $p_e\sim q_e$,

が成り立つように選んでいく．ここに，3.1 でと同様に，E_n は $\{1,\cdots,n\}$ から $\{+1,-1\}$ への写像の全体とし，$e\in E_n$ に対し，$p_e=\prod_{i=1}^{n}e(i)a_i$, $q_e=\prod_{i=1}^{n}e(i)b_i$

とする．

まず，$a_1 \in A$ に対し $b_1 \in B$ を $a_1 \sim b_1$, $-a_1 \sim -b_1$ となるようにとる．$A \sim B$ であるから，このようなものが存在する．$b_1, \cdots, a_{2n+1}$ が $(*)_{2n+1}$ を満たすように選ばれたとしよう．つまり，各 $e \in E_{2n+1}$ に対し $p_e \sim q_e$ が成り立つとする．$e \in E_{2n+1}$ に対し，$x_e \in B$ を $x_e \leqslant q_e$, $p_e \cdot a_{2n+1} \sim q_e \cdot x_e$, $p_e \cdot -a_{2n+1} \sim q_e \cdot -x_e$ が成り立つようにとり，$b_{2n+1} = \sum \{x_e \mid e \in E_{2n+1}\}$ と置く．$q_e \cdot b_{2n+1} = q_e \cdot x_e$, $q_e \cdot -b_{2n+1} = q_e \cdot -x_e$ だから，$(*)_{2n+2}$ が成立する．同様に a_{2n+2} も b_{2n+2} に対し $(*)$ が成り立つようにとれる．$m, k \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\}$ に対し，$a_m \leqslant a_k$ と $b_m \leqslant b_k$ は同値になる：$m, k < n$ となる $n \in \boldsymbol{N}$ をとるとき，

$a_m \leqslant a_k$

$\Longleftrightarrow e(m)=1$, $e(k)=0$ となるすべての $e \in E_n$ に対し $p_e = 0$

$\Longleftrightarrow A \upharpoonright p_e$ は，$e(m)=1$, $e(k)=0$ となるすべての $e \in E_n$ に対し自明になる

$\Longleftrightarrow B \upharpoonright q_e$ は，$e(m)=1$, $e(k)=0$ となるすべての $e \in E_n$ に対し自明になる

$\Longleftrightarrow e(m)=1$, $e(k)=0$ となるすべての $e \in E_n$ に対し $q_e = 0$

$\Longleftrightarrow b_m \leqslant b_k$.

したがって，$f(a_m) = b_m$ で A から B への写像 f が定義できる．（1）により，f は A 上で定義され，B への全単射となる．また f と f^{-1} は共に単調であるから，同型写像でもある．　▮

5.2.3 系　すべての無原子的可算無限ブール代数は，可算無限な生成系上の自由ブール代数，および，正の有理数の全体の集合上の区間ブール代数と同型になる．

証明　2つの可算ブール代数 A, B に対し $A \sim B$ を，A と B は共に自明であるか共に自明でなく無原子的であることと定義する．このとき，$\sim$はヴォート関係となるから，任意の2つの可算な自明でない無原子的ブール代数は，同型となる．特に，濃度 $\aleph_0$ の生成系上の自由ブール代数と正の有理数の全体の集合上の区間ブール代数は共に可算な自明でない無原子的ブール代数であるから，同型である．　▮

5.2.4 系 すべての可算ブール代数は，ある区間ブール代数と同型である．

証明 A を可算ブール代数としよう．系 4.3.4 により，濃度 $\aleph_0$ の生成系上の自由ブール代数 F から A への上射 p が存在する．系 5.2.3 により F は $\boldsymbol{Q}$ 上の区間ブール代数と同型だから，全順序集合となる生成系 X を持つ．したがって，$p[X]$ は，全順序集合で A の生成系だから，命題 3.2.6 により，A はある区間ブール代数と同型である． ∎

もう1つの無原子的可算ブール代数の例として，$\boldsymbol{Z}$ の周期的な部分集合全体の作る集合ブール代数が挙げられる．ここで，$\boldsymbol{Z}$ の部分集合 M が周期的であるとは，ある自然数 $a>0$ に対し $M+a=\{m+a \mid m\in M\}=M$ が成り立つことである．

ブール代数 A を可算無限かつ原子的であるとする．任意の $a\in A$ で $A\restriction a$ が無限となるものに対し，$a=a_1+a_2$ となる互いに素な $a_1, a_2\in A$ があって $A\restriction a_1$ と $A\restriction a_2$ が共に無限になるとき，A を**ほとんど無原子的**と呼ぼう．上の条件は，$A/I(A)$ が無原子的であるということにほかならない．ブール代数 A, B に対し $A\sim B$ を，A と B は共に有限で同型であるか，共にほとんど無原子的なこととすると，$\sim$はヴォート関係になる．したがって，すべての可算でほとんど無原子的なブール代数は同型であることが分かる．ほとんど無原子的なブール代数の例として，自然数の帰納的部分集合の全体のブール代数，また，ほとんど周期的な整数の集合の全体の作るブール代数が挙げられる．ここで，$N\subseteq\boldsymbol{Z}$ がほとんど周期的であるとは，周期的な $\boldsymbol{Z}$ の部分集合 M で $N\triangle M$ が有限となるようなものが存在することをいう．

次の命題の証明では，ヴォートの定理を双対空間に移して考えた方が具合がよい．このときには，ヴォートの定理は次のように述べられる：$\approx$ を，可算基を持つブール空間のクラス上の対称律を満たす関係とする．$\approx$ は，更に，$X\approx Y$ で $X=\varnothing$ なら $Y=\varnothing$，$X\approx Y$ で $a\subseteq X$ が開閉部分集合なら，開閉部分集合 $b\subseteq Y$ があって，$a\approx b$ かつ $X\setminus a\approx Y\setminus b$ を満たすとする．このとき，$X\approx Y$ なら，X と Y は位相同型になる．このような $\approx$ を**ブール空間のヴォート関係**と呼ぶことにしよう．

5.2.5 命題 2つの可算な超原子的ブール代数 A, B は $\alpha(A)=\alpha(B)$,

$n(A)=n(B)$ となるとき，かつ，そのときに限り，同型となる.

証明 双対空間に移して，位相空間論の中で考える．まず，以下のことに注意しよう： X を双対ブール代数が超原子的となるようなブール空間として，$X=S\cup T$ を X の2つの互いに素な開閉部分集合への分解とする．このとき，すべての順序数 α に対し，$S_\alpha=S\cap X_\alpha$, $T_\alpha=T\cap X_\alpha$ が成り立つ．したがって，$\alpha(S)<\alpha(T)$ なら $\alpha(X)=\alpha(T)$ で，$n(X)=n(T)$ となる．同様のことが，$\alpha(T)<\alpha(S)$ の場合にもいえる．$\alpha(S)=\alpha(T)$ なら，$\alpha(X)=\alpha(S)$ で $n(X)=n(S)+n(T)$ である.

さて，ブール空間 X, Y に対し，$X\approx Y$ を，X と Y の双対ブール代数が可算かつ超原子的で，$X=Y=\varnothing$，または $\alpha(X)=\alpha(Y)$ かつ $n(X)=n(Y)$ の成り立つことと定義する．$\approx$ がブール空間のヴォート関係であることを示せばよい．$X\approx Y$ かつ $X\neq\varnothing$ として，U を X の開閉部分集合としよう．$\alpha=\alpha(U)<\alpha(X)$ である場合についてまず考えてみる（$\alpha(X\backslash U)<\alpha(X)$ の場合も，同様に議論できる）：$\alpha=\alpha(U)<\alpha(X)=\alpha(Y)$ であるから，Y_α は無限集合である．$n=n(U)$ として，Y の分散的な部分空間 Y_α の孤立点 $y_1, \cdots, y_n$ をとる．$\{y_1, \cdots, y_n\}$ は Y_α の開閉部分集合であるから，Y の開閉部分集合 V で $V\cap Y_\alpha=\{y_1, \cdots, y_n\}$ となるものがある．このとき，$V_\alpha=\{y_1, \cdots, y_n\}$ となるから，$\alpha(V)=\alpha=\alpha(U)$, $n(V)=n=n(U)$ である．一方，$\alpha(V)<\alpha(Y)$ だから，$\alpha(Y\backslash V)=\alpha(Y)=\alpha(X\backslash U)$, 同様に，$n(Y\backslash V)=n(X\backslash U)$ となる．$\alpha(U)=\alpha(X\backslash U)=\alpha(X)=\alpha$ の場合には，$k=n(U)$, $l=n(X\backslash U)$ とする．$n(X)=k+l=n(Y)$ である．$y_1, \cdots, y_k$ を再び Y_α の異なる孤立点として，V を，$V\cap Y_\alpha=\{y_1, \cdots, y_k\}$ となる Y の開閉部分集合とすると，上と同様に $\alpha(V)=\alpha(Y\backslash V)=\alpha$, $n(V)=k$, $n(Y\backslash V)=l$ となる．▮

上の命題により，すべての自明でない可算な超原子的ブール代数を具体的に列挙することができる．すべての順序数 α と $n\in\boldsymbol{N}$, $n\geqslant 1$ に対し，順序数区間 $[0, \omega^\alpha\cdot n]$ の開閉ブール代数 $A_{\alpha n}$ は不変量 $\alpha(A_{\alpha n})=\alpha, n(A_{\alpha n})=n$ を持ち可算である．したがって，任意の可算な超原子的ブール代数は，同じ不変量を持つ $A_{\alpha n}$ と同型になる．また，可算な超原子的ブール代数 A に対し $\alpha(A)$ は常に可算である：$\alpha(A)\geqslant\omega_1$ なら，$(I_\alpha(A))_{\alpha\leqslant\alpha(A)}$ は A のイデアルの真

の下降列となるので，$|A| \geqslant \omega_1$ となってしまうからである．以上により，同型を除いてちょうど ω_1 個の可算な超原子的ブール代数が存在することが分かる．これに対し，2^ω 個の可算ブール代数が存在することは容易に示せる．一方，非可算な基数 κ に対しては，同型を除いて，濃度 κ のブール代数の個数と同じだけ，つまり 2^κ 個の超原子的ブール代数が存在することが示せる．

5.2 の演習問題

5.2.1 A を可算ブール代数で無限個の原子元を持つものとする．このとき，$A \cong A \times \boldsymbol{2}$ となることを示せ．

5.2.2 $C \subseteq \boldsymbol{R}$ を“古典的” **カントル空間**とする．つまり，$C = \bigcap_{n \in \omega} C_n$ で，$C_0 = [0, 1]$，また，C_n は 2^n 個の互いに素な区間の和集合で，C_{n+1} は C_n のこのような 2^n 個の区間 $[a, b]$ のそれぞれを部分区間 $[a, a+(b-a/3)]$，$[b-(b-a/3), b]$ で置き替えることによって得られるものとする．

a）C はブール空間で，孤立点を持たず，可算な開基を持つ．

b）C は“抽象的”カントル空間 $\boldsymbol{2}^{\boldsymbol{N}}$ と位相同型である．

第6章　分配性と表現可能性

この章では，2.1 に掲げた分配則（D）の無限個の（場合によっては無限個の元の）和の積への一般化について考察する．このような一般化は，すべてのブール代数 A では成り立たない．大雑把にいって，A でこのような一般化された分配則が成り立つということは，A での無限演算が完備集合ブール代数（定義は 6.1 を参照）におけるようになされるということを意味する．更に，κ-完備，あるいは完備ブール代数の圏での自由ブール代数について考察する．ここでの主要定理は，無限な自由完備ブール代数は存在しないことを主張するガイフマン・ハレス・ソロヴェイの定理である．なお，無限分配則に関する詳細については，たとえば，参考文献［11］を参照されたい．

6.1　無 限 分 配 則

A をブール代数として，$1\leqslant i\leqslant n$ に対し，M_i を $s_i=\sum M_i$ の存在するような A の部分集合とする．分配則（D）と補題 2.1.3 a）により，積 $s_1\cdot\cdots\cdot s_n$ は，$\sum\{m_1\cdot\cdots\cdot m_n \mid (m_1,\cdots,m_n)\in M_1\times\cdots\times M_n\}$ と変形できる．同様なことが任意の積の有限和についてもいえる．この計算則の無限個の因子への一般化は，A が完備であっても，一般には成り立たない．κ と λ を基数とする．ブール代数 A は，任意の添数集合 I, J，$|I|\leqslant\kappa, |J|\leqslant\lambda$ と A の任意の元の族 $(a_{ij})_{i\in I, j\in J}$ に対し，$Fn(I,J)$ を I から J への関数の全体の集合として，

$$(D_{\kappa\lambda})\quad \prod_{i\in I}\sum_{j\in J}a_{ij}\simeq\sum_{f\in Fn(I,J)}\prod_{i\in I}a_{if(i)}$$

が成り立つとき，**(κ,λ)-分配的**であるという．A は，(κ,κ)-分配的であると

き，**κ-分配的**であるといい，すべての基数 λ に対し (κ,λ)-分配的であるとき，**(κ,∞)-分配的**であるという．更に，A は，すべての基数 κ,λ に対し (κ,λ)-分配的であるとき，**完全分配的**であるという．上で見たように，κ が有限の場合には，任意の λ に対し，$D_{\kappa\lambda}$ はすべてのブール代数で成り立つ．したがって，分配則が自明でなくなるのは，$D_{\omega 2}$ から先である．

例 6.1.1　カントル空間 $X=2^N$ の正則開集合代数は $(\omega,2)$-分配的でない：$I=N$, $J=2=\{0,1\}$ とする．$n\in N$ と $\varepsilon\in 2$ に対し，$a_{n\varepsilon}=\{x\in X \mid x(n)=\varepsilon\}$ と定義する．$a_{n\varepsilon}$ は X の開閉部分集合だから，正則開集合である．$n\in N$ に対し $a_{n0}+a_{n1}=1$ だから，$\prod_{n\in N}\sum_{\varepsilon\in 2}a_{n\varepsilon}=1$ である．一方，すべての $f:N\to 2$ に対し $\bigcap_{n\in N}a_{nf(n)}=\{f\}$ となるから，$RO(X)$ で $\prod_{n\in N}a_{nf(n)}=(\bigcap_{n\in N}a_{nf(n)})^{hi}=0$ となる．　▮

ブール代数 A は，$|M|\leqslant\kappa$ を満たすすべての A の部分集合 M に対し $\sum^A M$ が存在するとき，**κ-完備**であるという．このときには，補題 2.1.3 b) により，$|M|\leqslant\kappa$ となる A の部分集合 M に対し，$\prod^A M$ も存在する．集合 X 上の集合ブール代数 A は，$|M|\leqslant\kappa$ を満たすすべての $M\subseteq A$ に対し $\bigcup M$ が（したがって $\bigcap M$ も）A の元となるとき，**κ-集合ブール代数**と呼ばれる．A が κ-完備で，A の部分集合 M で $|M|\leqslant\kappa$ となるものに対しその A での上限および下限は $P(X)$ のそれと一致するという命題は，これと同値である．$\aleph_0$-集合ブール代数は **σ-集合ブール代数**とも呼ばれる．同様に，X 上の集合ブール代数 A は，すべての $M\subseteq A$ に対し $\bigcup M$ と $\bigcap M$ が A の元となるとき，**完全・集合ブール代数**と呼ばれる．

6.1.1 命題　κ-集合ブール代数は κ-分配的である．特に，すべての巾集合代数は完全分配的である．

証明　A を X 上の κ-集合ブール代数とする．更に，$|I|$, $|J|\leqslant\kappa$ として，$i\in I$, $j\in J$ に対し $a_{ij}\in A$ とする．a_{ij} は X の部分集合であることに注意しよう．$a=\prod_{i\in I}\sum_{j\in J}a_{ij}$ とする．A は κ-集合ブール代数だから，$a=\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}a_{ij}=\bigcup_{f\in Fn(I,J)}\bigcap_{i\in I}a_{if(i)}$ となる．$f\in Fn(I,J)$ に対し，$p_f=\bigcap_{i\in I}a_{if(i)}=\prod^A_{i\in I}a_{if(i)}$ だから，$\bigcup_{f\in Fn(I,J)}p_f=\sum^A_{f\in Fn(I,J)}p_f$ が示せればよい．しかし，$\bigcup_{f\in Fn(I,J)}p_f$ は A の元であるから，$\bigcup_{f\in Fn(I,J)}p_f=\sum^{P(X)}_{f\in Fn(I,J)}p_f=\sum^A_{f\in Fn(I,J)}p_f$ となる．　▮

6.1.2 定理 完備ブール代数 A に対し以下は同値である：

a) A はある巾集合代数と同型,

b) A はある完全・集合ブール代数と同型,

c) A は完全分配的,

d) A は原子的.

証明 a)⇒b), b)⇒c) は自明である。

c)⇒d)：$J=\{+1,-1\}$, $I=A$ として, $x\in I$, $j\in J$ に対し $a_{xj}=j\cdot x$ と置く. $\prod_{x\in I}\sum_{j\in J}a_{xj}=1$ であるから,

(1) $\sum_{f\in Fn(I,J)}\prod_{x\in A}a_{xf(x)}=1$

が成り立つ.

$f:I\to J$ に対し $p_f=\prod_{x\in A}a_{xf(x)}$ として, $D=\{p_f|f\in Fn(I,J)\}\setminus\{0\}$ と置く. このとき, すべての $p_f\in D$ は A の原子元となる： $x\in A$ が $x\leqslant p_f$ を満たすとしよう. $f(x)=+1$ なら, $a_{xf(x)}=x\geqslant p_f$ だから, $x=p_f$ が成り立つ. $f(x)=-1$ なら, $a_{xf(x)}=-x\geqslant p_f$, したがって, $x\leqslant -x$ となるから, $x=0$ である.

(1) により, A の原子元全体の上限は 1 になるから, A は原子的である.

d)⇒a)： 命題 2.2.3 による. ▮

分配則 $D_{\kappa\lambda}$ の "半分" は, すべてのブール代数で常に成り立つ：

6.1.3 補題 $(a_{ij})_{i\in I,j\in J}$ をブール代数 A の元の族とする. このとき, $\sum_{f\in Fn(I,J)}\prod_{i\in I}a_{if(i)}\leqslant\prod_{i\in I}\sum_{j\in J}a_{ij}$ が, 両辺に現われる上限および下限がすべて存在するなら, 常に成り立つ.

証明 $k\in I$ と $f\in Fn(I,J)$ を固定するとき, $\prod_{i\in I}a_{if(i)}\leqslant a_{kf(k)}\leqslant\sum_{j\in J}a_{kj}$ となる. したがって, $\sum_{f\in Fn(I,J)}\prod_{i\in I}a_{if(i)}\leqslant\sum_{j\in J}a_{kj}$ が成り立ち, これから補題の不等式が示せる. ▮

次に述べる 2 つの補題は, 命題 6.1.6 の証明で必要となる。

6.1.4 補題 A をすべての $\mu<\lambda$ に対し μ-完備であるとして, $(a_j)_{j\in J}$ を $|J|\leqslant\lambda$ となる A の元の族とする. このとき, 互いに素な A の元の族 $(d_j)_{j\in J}$ で, 各 $j\in J$ に対し $d_j\leqslant a_j$ を満たし, $\{a_j|j\in J\}$ と $\{d_j|j\in J\}$ の上界が同じ

になるものがある。特に $\sum_{j\in J} a_j \simeq \sum_{j\in J} d_j$ である.

証明 一般性を失うことなく，J は 順序数 ρ, $\rho\leqslant\lambda$ だとしてよい. $j\in J$ に対し，$d_j = a_j \cdot -\sum_{i<j} a_i$ とする. j に関する帰納法で，d_i, $i<j$ は互いに素で，$j\in J$ に対し，$\sum_{i<j} a_i = \sum_{i<j} d_i$ が成り立つことが示せるから，この$(d_j)_{j\in J}$ が補題での性質を満たすことが分かる. ▮

6.1.5 補題 A を λ^κ-完備とする. A は，A の元の族 $(d_{ij})_{i\in I, j\in J}$ で各 $i\in I$ に対し $(d_{ij})_{j\in J}$ が互いに素になるようなものに対し $D_{\kappa\lambda}$ が常に成り立つとき，かつ，そのときに限り，(κ, λ)-分配的となる.

証明 必要性は明らかである. 十分性を示す：$|I|\leqslant\kappa$, $|J|\leqslant\lambda$ として，各 $i\in I$, $j\in J$ に対し $a_{ij}\in A$ とする. 補題 6.1.4 により，各 $i\in I$ に対し $d_{ij}\leqslant a_{ij}$, $j\in J$ を，A の元の族 $(d_{ij})_{j\in J}$ が互いに素になり，$\sum_{j\in J} d_{ij} = \sum_{j\in J} a_{ij}$ が成り立つように選ぶ. このとき，

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} &= \prod_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij}\\ &= \sum_{f\in Fn(I,J)}\prod_{i\in I} d_{if(i)}\\ &\leqslant \sum_{f\in Fn(I,J)}\prod a_{if(i)}\end{aligned}$$

が成り立つ. これと補題 6.1.3 から，A は (κ, λ)-分配的となることが分かる. ▮

6.1.6 命題 κ を無限基数として A を 2^κ-完備とする. このとき，以下は同値となる：

a) A は $(\kappa, 2^\kappa)$-分配的,

b) A は κ-分配的,

c) A は $(\kappa, 2)$-分配的.

証明 a)⇒b) および b)⇒c) は自明である。c)⇒a)：A を $(\kappa, 2)$-分配的として，$(a_{if})_{i\in I, f\in F}$ を A の元の族で，$\mu=2^\kappa$ として，$D_{\kappa\mu}$ に出てくる和と積のすべて存在するようなものとする. 一般性を失うことなく $|I|=\kappa$, $|F|=\mu$, また，F は I から $2=\{0,1\}$ への関数の全体の集合としてよい.

更に，補題 6.1.5 により，各 $i\in I$ に対し，A の元の族 $(a_{if})_{f\in F}$ は互いに素であるとしてよい. I は無限集合だから，全単射 $\pi: I\times I\to I$ が存在す

る．λ と ρ を I から I への写像で $\pi^{-1}(k)=(\lambda(k),\ \rho(k))$ を満たすものとする．G を I から F への写像の全体の集合とする．$g\in G$ に対して $f\in F$ で $f(k)=g(\lambda(k))(\rho(k))$ となるものを対応させる写像は，G から F への自然な全単射となる．$i,j\in I$ と $\varepsilon\in 2$ に対し，$s_{ij\varepsilon}=\sum\{a_{if}\mid f\in F,\ f(j)=\varepsilon\}$ と定義する．このとき，すべての $i,j\in I$ に対し

（２） $s_{ij0}+s_{ij1}=\sum_{f\in F}a_{if}$

が成り立つ．また，$i,j\in I$ と $f\in F$ に対し

（３） $\prod_{j\in I}s_{ijf(j)}=a_{if}$

となる：$\{a_{ig}\mid g\in F\}$ は互いに素であるから，$s_{ij\varepsilon}$，したがって $x=\prod_{j\in I}s_{ijf(j)}$ は，ある $M\subseteq F$ によって，$\sum_{g\in M}a_{ig}$ と表わせる．すべての $j\in I$ に対し，$a_{if}\leqslant\sum_{g(j)=f(j)}a_{ig}=s_{ijf(j)}$ が成り立つことは明らかである．一方，f と異なる $h\in F$ に対し，a_{ih} は x と素になることは，$f(j)\neq h(j)$ となる $j\in I$ をとってみれば分かる．このときには，$x\leqslant s_{ijf(j)}=\sum\{a_{ig}\mid g\in F\ g(j)=f(j)\}$ だが，右辺に現われる g は，すべて h と異なり，したがって，右辺の和は a_{ih} と素になるからである．

$g\in G$ として，$f\in F$ を上記の g に対応する関数とすると，

（４） $\prod_{i\in I}a_{ig(i)}=\prod_{k\in I}s_{\lambda(k)\rho(k)f(k)}$

が成り立つ：（３）により，

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I}a_{ig(i)}&=\prod_{i\in I}\prod_{j\in I}s_{ijg(i)(j)}\\&=\prod_{k\in I}s_{\lambda(k)\rho(k)g(\lambda(k))(\rho(k))}\\&=\prod_{k\in I}s_{\lambda(k)\rho(k)f(k)}\end{aligned}$$

となるからである．

さて，$(a_{if})_{i\in I,f\in F}$ に対する主張 $D_{\kappa\mu}$ は，$(s_{\lambda(i)\rho(i)\varepsilon})_{(i,j)\in I\times I,\varepsilon\in 2}$ に対する $D_{\kappa 2}$ と（２），（４）から導かれる：$\lambda:I\to I$ は上射だから，

$$\prod_{i\in I}\sum_{f\in F}a_{if}=\prod_{i\in I}\sum_{f\in F}a_{\lambda(i)f}$$

となり，

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I}\sum_{f\in F}a_{\lambda(i)f}&=\prod_{i\in I}\sum_{\varepsilon\in 2}s_{\lambda(i)\rho(i)\varepsilon}\\&=\sum_{f\in F}\prod_{i\in I}s_{\lambda(i)\rho(i)f(i)}\\&=\sum_{g\in G}\prod_{i\in I}a_{ig(i)}\end{aligned}$$

となるからである． ∎

最後に，分配則 $D_{\kappa\lambda}$ を弱めた，次の計算則を考えてみよう．ブール代数 A は，すべての $|I|\leqslant\kappa$，$|J|\leqslant\lambda$ となる添数集合 I, J と $a_{ij}\in A$, $i\in I$, $j\in J$ に対し $F=Fn(I, P_\omega(J))$ として，

$$(D'_{\kappa\lambda})\qquad \prod_{i\in I}\sum_{j\in J}a_{ij}\simeq\sum_{f\in F}\prod_{i\in I}s_{if(i)}$$

の成り立つとき，**弱-(κ,λ)-分配的**であるという．

ここに，$P_\omega(J)$ は J の有限部分集合の全体の集合とし，$i\in I$，$e\in P_\omega(J)$ に対し，$s_{ie}=\sum_{j\in e}a_{ij}$ とする．

このタイプの計算則の自明でないもののうちで一番弱い $D'_{\aleph_0\aleph_0}$ は，たとえば，すべての測度ブール代数で成立する（演習問題 9.1.2 を参照）．

6.1 の演習問題

6.1.1 カントル空間 2^N の正則開集合代数は弱分配則（$D'_{\aleph_0\aleph_0}$）を満たさないことを示せ．

6.1.2 弱分配則（$D'_{\kappa\lambda}$）の等式に現われる和と積がすべて存在するとき，

$$\sum_{f\in F}\prod_{i\in I}s_{if(i)}\leqslant\prod_{i\in I}\sum_{j\in J}a_{ij}$$

が常に成り立つことを示せ．

6.1.3 (κ,λ)-分配的ブール代数は，弱-(κ,λ)-分配的である．

κ を無限基数として，$(P,\leqslant)$ を半順序集合とする．すべての順序数 $\rho<\kappa$ と P の下降列 $(p_\alpha)\alpha<\rho$ に対し，$(p_\alpha)\alpha<\rho$ の P での下界が常に存在するとき，P は **κ-閉半順序集合**であるという．

6.1.4 A をブール代数とする．$A\setminus\{0\}$ の稠密な部分集合 P で κ-閉半順序集合となるものが存在するとき，すべての基数 $\mu<\kappa$ に対し A は (μ,∞)-分配的になる．

6.2 κ-表現可能性，自由 κ-完備ブール代数，完備ブール代数

以下では κ を無限基数とする．A が κ-完備ブール代数であるとき，A はある κ-集合ブール代数と同型になるのではないかという予想は，もっともらしく思える．しかしながら，カントル空間 $X=2^\omega$ の正則開集合代数 $RO(X)$ は，すでに $\kappa=\aleph_0$ の場合での上の予想に対する反例となっている：$RO(X)$ は完備だが，例 6.1.1 に示したように $\aleph_0$-分配的でないから，命題 6.1.1 により，どの σ-集合ブール代数とも同型にならない．

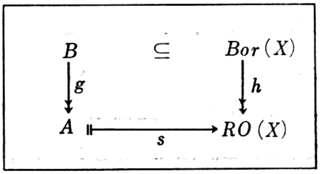
ブール代数 A は，κ-集合ブール代数 B と B から A への κ-完備な上射

が存在するとき，**κ-表現可能**であるという．$\kappa=\aleph_0$ のときには，**σ-表現可能**ともいう．このときには，A 自身も κ-完備になる．

定理 6.2.1 とそれに続く命題 6.2.2 の証明のために，定理 3.2.3 での状況を復習しよう：X をコンパクト・ハウスドルフ空間，あるいはもっと一般に，ベールの定理の成り立つような空間とする．X のボレル代数 $Bor(X)$ は，X の開集合の全体から生成される X 上の σ-集合ブール代数であった．M を第1類のボレル集合の全体のイデアルとする．ベールの定理により，すべてのボレル集合 u に対し，$u\sim_M h(u)$ となるような正則開集合 $h(u)$ が高々1つ存在する．h は，実は $Bor(X)$ 上で定義できて，$RO(X)$ への σ-完備な上射になり，このことから，$RO(X)\cong Bor(X)/M$ が示せた．

6.2.1 定理（ルーミス・シコルスキー）σ-完備ブール代数は σ-表現可能である．

証明　A を σ-完備として，X を A のストーン空間とする．ストーン写像 s は A を $s[A]=Clop(X)$ に移すが，これは $RO(X)$ の稠密な部分ブール代数だから，補題 2.4.2 b) により，s は完備である．$h: Bor(X)\to RO(X)$ を上記のようにとり $B=h^{-1}[s[A]]$ とする．



s が1対1写像であることから，$g=s^{-1}\circ(h\restriction B)$ が定義できるが，これは，明らかに準同型写像となる．h は上射であるから，g も上射となる．A, h, s はすべて σ-完備だから，B と g も σ-完備である．∎

6.2.2 命題　2^κ-表現可能なブール代数は κ-分配的である．κ-分配的な κ-完備ブール代数は κ-表現可能である．

証明　B を 2^κ-集合ブール代数として，$g: B\to A$ を 2^κ-完備な上射とする．このとき，A が κ-分配的になることを示そう．$|I|$, $|J|\leqslant\kappa$ として $i\in I$ $j\in J$ に対し $a_{ij}\in A$ とする．各 $i\in I$, $j\in J$ に対し b_{ij} を a_{ij} の g による逆像の1つとする．B は 2^κ-完備で，命題 6.1.1 により κ-分配的だから，

$$\prod_{i\in I}\sum_{j\in J}b_{ij}=\sum_{f\in Fn(I,J)}\prod_{i\in I}b_{if(i)}$$

となる．g は 2^κ-完備だから，これから，

$$\prod_{i\in I}\sum_{j\in J}a_{ij}=\sum_{f\in F_n(I,J)}\prod_{i\in I}a_{if(i)}$$

が出る．

次に，A を κ-分配的で κ-完備とする．X を A のストーン空間として，B を $Clop(X)$ から生成された X 上の κ-集合代数とする．つまり，

$$B=\bigcap\{C \mid Clop(X)\subseteq C\subseteq P(X),\ C \text{ は } X \text{ 上の } \kappa\text{-集合ブール代数}\}$$

である．u を X の部分集合として，A の部分集合 M で $|M|\leqslant\kappa$ かつ $\prod^A M=0$ となるものがあり $u=\bigcap_{m\in M}s(m)$ と表わせるとき，u を κ-疎であると呼ぼう．また，I を $|I|\leqslant\kappa$ となる添数集合として，各 $i\in I$ に対し κ-疎集合 $u_i\subseteq X$ があって $u\subseteq\bigcup_{i\in I}u_i$ となるとき，u を κ-空疎であると呼ぼう．κ-空疎な X の部分集合の全体は，$P(X)$ の κ-完備なイデアルとなり，$M=\{b\in B \mid b$ は κ-空疎$\}$ は，B の κ-完備なイデアルとなる．このとき，

（1） すべての $b\in B$ に対し $b\sim_M r$ となる $r\in Clop(X)$ が高々1つ存在する

が成り立つ．（1）を仮定すれば，B から $Clop(X)$ への部分写像 g を，$b\sim_M r$ となる $r\in Clop(X)$ があるとき，$g(b)=r$ とすることにより定義できる．M は B の κ-完備なイデアルで $A\cong Clop(X)$ は κ-完備だったから，g の定義域 B_0 は κ-集合ブール代数になり，g は κ-完備である．一方，$u\in Clop(X)$ に対し $g(u)=u$ となるから，B_0 は $Clop(X)$ を含む．したがって，$B_0=B$ となる．更に，g は上射だから，A は，$Clop(X)$ と同型になり，κ-表現可能であることが示せる．

（1）を証明するには，次のようなベールの定理と類似の定理が証明できればよい．

（2）空でない X の開集合 u は κ-空疎でない．

一般性を失うことなく，ある $a\in A$ に対し $u=s(a)$ であるとしてよい．$s(a)$ が κ-空疎と仮定して，$a=0$ を示す．添数集合 I, J, $|I|, |J|\leqslant\kappa$ と $a_{ij}\in A$, $i\in I$, $j\in J$ に対し，$\prod^A_{j\in J}a_{ij}=0$ がすべての $i\in I$ で成り立ち，$s(a)\subseteq\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}s(a_{ij})$ となるものがある．$i\in I$, $j\in J$ に対し，$b_{ij}=-a_{ij}$, $p_{ij}=b_{ij}\cdot a$ と置く．このとき，すべての $i\in I$ に対し $\sum^A_{j\in J}b_{ij}=1$ となり，$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}s(b_{ij})\subseteq s(-a)$ が成り立つ．

更に，すべての $f: I\to J$ に対し，$\prod^A_{i\in I}p_{if(i)}=0$ となる：そうでなければ，

$x\in X$ で $\prod_{i\in I}^{A}p_{if(i)}\in x$ となるものがあるが，この x と，すべての $i\in I$ に対し $p_{if(i)}\in x$ が成り立つから，$a\in x$ である．ところが，$x\in\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}s(p_{ij})\subseteq\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}s(b_{ij})\subseteq s(-a)$ であるから，$-a\in x$ となり，矛盾である．

A は κ-分配的で κ-完備だったから，

$$\prod_{i\in I}^{A}\sum_{j\in J}^{A}p_{ij}=\sum_{f\in Fn(I,J)}^{A}\prod_{i\in I}^{A}p_{if(i)}=0$$

となり，したがって，

$$0=\prod_{i\in I}^{A}\sum_{j\in J}^{A}p_{ij}=a\cdot\prod_{i\in I}^{A}\sum_{j\in J}^{A}b_{ij}=a\cdot 1=a$$

が成り立つ． ▮

“集合 U 上の自由ブール代数” という概念は，κ-完備ブール代数と κ-完備準同型写像，あるいは完備ブール代数と完備準同型写像の圏でも，ブール代数と準同型写像の圏でと同様に考えることができるが，そこで得られる結果は，ブール代数の圏での結果とはかなり違ったものになる．κ を無限基数として，F を κ-完備（完備）ブール代数とする．F の部分ブール代数 B は，すべての $M\subseteq B$ で $|M|\leqslant\kappa$ となるものに対し（すべての $M\subseteq B$ に対し）$\sum^{F}M$ が B の元になるとき，F の **κ-完備（完備）部分ブール代数**という．X を F の部分集合とするとき，F の X から**κ-完備に（完備に）生成された部分ブール代数**とは，$X\subseteq B$ となる F の κ-完備（完備）部分ブール代数 B のうち最小のものとする．U を F の部分集合とする．F は，U から κ-完備に（完備に）生成され，U から任意の κ-完備（完備）ブール代数 A への写像 f が常に F から A への κ-完備（完備）準同型 g に拡張できるとき，U 上の**自由 κ-完備（自由完備）ブール代数**という．g は，このとき，f から一意に決まり，4.3 でと同じように，U 上の自由 κ-完備（自由完備）ブール代数 F と U' 上の自由 κ-完備（自由完備）ブール代数 F' は，U と U' が同じ濃度を持つとき，同型になることが容易に示せる．

任意の基数 κ, $\lambda\geqslant\aleph_0$ に対し，U, $|U|=\lambda$ 上の自由 κ-完備ブール代数 $F_{\kappa\lambda}$ が存在することが示せる（演習問題 6.2.2 を参照）．この証明は，しかし，定理 4.3.3 のときと違い，$F_{\kappa\lambda}$ の構造に関する新しい情報を与えない．$\kappa=\aleph_0$ の場合に限っては，$|I|=\lambda$, X をカントル空間 2^I として，$F_{\aleph_0\lambda}$ は $P(X)$ で $Clop(X)$ によって生成された σ-集合ブール代数と同型になることが分かっ

ている．これに関しては，たとえばシコルスキーの本 [11] を参照されたい．

これに対し，U を無限集合とするときには，U 上の自由完備ブール代数が存在しないことを以下で示そう．

6.2.3 定理（ガイフマン・ハレス・ソロヴェイ）　すべての基数 κ に対し，$|B|\geq\kappa$ となる完備ブール代数 B で B はある可算集合から完備に生成されているようなものがある．

証明　κ を離散位相空間と考えて，$X=\kappa^\omega$ に，直積位相を入れ，この位相に関して，$B=RO(X)$ とする．X の部分集合 $u=\{x\in X \mid E(x)\}$ が，x の有限個の成分のみに関する条件 $E(x)$ によって定義されるときには，u は X の開閉部分集合となることに注意しよう．$\alpha<\kappa$ と $n, m\in\omega$ に対し，

$$a_{\alpha n}=\{x\in X \mid x(n)=\alpha\}$$
$$b_{mn}=\{x\in X \mid x(m)<x(n)\}$$

と定義する．これらは，開閉集合となるから B の元である．特に，このことから $|B|\geqslant\kappa$ が分かる．

$$(3)\quad a_{\alpha n}=-\sum_{\beta<\alpha}a_{\beta n}\cdot\prod_{n\in\omega}\left(-b_{mn}+\sum_{\beta<\alpha}a_{\beta m}\right)$$

が成り立つことを後に示すが，このことから，α に関する帰納法により，可算集合 $G=\{b_{mn} \mid m, n\in\omega\}$ から完備に生成された B の部分ブール代数はすべての $a_{\alpha n}$ を含むことが分かる．ところが，$a_{\alpha n}$ の全体は X の準基をなすから，これにより，B のすべての元は G から完備に生成されることが証明される．

（3）を示そう．$\alpha<\kappa$ と $n\in\omega$ に対し，

$$\bigcup_{\beta<\alpha}a_{\beta n}=\{x\in X \mid x(n)=\beta \text{ となる } \beta<\alpha \text{ が存在する}\}$$
$$=\{x\in X \mid x(n)<\alpha\}$$

は開閉集合である．したがって，

$$(4)\quad \sum_{\beta<\alpha}a_{\beta n}=\{x\in X \mid x(n)<\alpha\}$$

となる．更に，b_{mn} と $\sum_{\beta<\alpha}a_{\beta m}$ は開閉集合だから，

$$(5)\quad -b_{mn}+\sum_{\beta<\alpha}a_{\beta m}=\{x\in X \mid x(m)\nless x(n) \text{ または } x(m)<\alpha\}$$
$$=\{x\in X \mid x(m)<x(n) \text{ なら } x(m)<\alpha\}$$

である．$r=-\sum_{\beta<\alpha}a_{\beta n}\cdot\prod_{m\in\omega}\left(-b_{mn}+\sum_{\beta<\alpha}a_{\beta m}\right)$ として，$a_{\alpha n}\leqslant r$ となることは直ちに分かる：$a_{\alpha n}$ は，（4）により，$\sum_{\beta<\alpha}a_{\beta n}$ と素となる．一方，（5）によ

り，すべての $m\in\omega$ に対し，$a_{\alpha n}\leqq -b_{mn}+\sum_{\beta<\alpha} a_{\beta m}$ が成り立つからである．

もし $a_{\alpha n}<r$ だったとすれば，$u\in B$ で $0<u\leqq r\cdot -a_{\alpha n}$ となるものが存在する．一般性を失うことなく，u は X の基本開集合としてよい．u は，たとえば，

$$u=\{x\in X \mid x(n(1))=\alpha(1) \text{ かつ } \cdots \text{ かつ } x(n(k))=\alpha(k)\}$$
$$=a_{n(1)\alpha(1)}\cdot\cdots\cdot a_{n(k)\alpha(k)}$$

という形をしているとする．ここに，$n(1),\cdots,n(k)\in\omega$，$\alpha(1),\cdots,\alpha(k)<\kappa$ である．u は $a_{\alpha n}$ と素だから，$n(i)$ のうちの１つ，たとえば，$n(1)$ は n と一致して $\alpha(1)\neq\alpha$ とならなくてはならない．$\alpha(1)<\alpha$ とすれば，$u\leqq r$ だから，u は $a_{\alpha(1)n}=a_{\alpha(1)n(1)}$ と素になり矛盾である．$\alpha<\alpha(1)$ とすれば，m を $n(1),\cdots,n(k)$ のすべてと異なる自然数として，$x(m)=\alpha$ となる $x\in u$ がとれる．$x\in u\leqq r\leqq -b_{mn}+\sum_{\beta<\alpha} a_{\beta m}$ と $x(m)=\alpha<\alpha(1)=x(n(1))=x(n)$ から（５）により $x(m)<\alpha$ となるが，これは矛盾である． ▌

6.2.4 系 無限集合上の自由完備ブール代数は存在しない．

証明 $|U|\geqq\aleph_0$ として，F が U 上の自由完備ブール代数だとする．$\kappa=|F|^+$ として定理 6.2.3 の B をとり，f を U から B の可算完備生成系 G の上への写像として，g を f の拡張となる F から B への完備準同型とする．F の g による像は，G を含む B の完備な部分ブール代数となるから，g は上射となる．したがって，$|B|\leqq|F|$ だが，これは矛盾である． ▌

6.2 の演習問題

6.2.1 B を κ-完備ブール代数として，X を少なくとも２つの元を持つ B の部分集合とする．A を X から κ-完備に生成された B の部分ブール代数とするとき，$|A|\leqq|X|^\kappa$ が成り立つ．

6.2.2 I を任意の集合として，$\kappa\geqq\aleph_0$ とする．κ-完備ブール代数 F と１対１写像 $e:I\to F$ で，F が $e(I)$ 上 κ-自由完備ブール代数となるようなものを構成せよ．

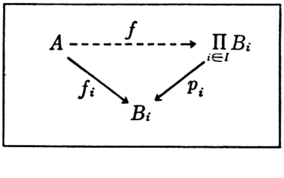
6.2.3 $|I|=\aleph_1$，$|J|=\aleph_0$，$X=I^J$ とする．I を離散位相で考え，X は，その直積位相を持つものとする．このとき，完備ブール代数 $RO(X)$ は $\aleph_1$-表現可能ではない．

第 7 章　直積と補積，連鎖条件

この章では，ブール代数の族 $(B_i)_{i\in I}$ からブール代数を作る 2 つの構成法，直積および補積について考察する．ブール代数の多くの性質に関して，直積の振舞いは，全く単純であるが，直積への分解，特に完備ブール代数の直積への分解は，極めて有用である（たとえば，補題 7.1.4 とその応用）．これに比べると，補積は，多少，直観的に把握しにくい．最後に，連鎖条件に関するいくつかの注意を述べる．後に第 8 章および第 9 章で示されるように，連鎖条件は，完備ブール代数を考察するときの強力な補助手段となる．

7.1　ブール代数の直積への分解

各 $i\in I$ に対し B_i がブール代数であるとき，明らかに，B_i の集合としての直積 $\prod_{i\in I} B_i$ は成分ごとの演算によりブール代数となる．$\prod_{i\in I} B_i$ はすべての因子が κ-完備（完備）のとき，かつ，そのときに限り，κ-完備（完備）となる．各 $j\in I$ に対し，$p_j((b_i)_{i\in I})=b_j$ で定義される $\prod_{i\in I} B_i$ から，第 j 因子 B_j への射影は完備な上射となる．$\prod_{i\in I} B_i$ は族 $(p_i)_{i\in I}$ と共に次の普遍的性質を満たす．



7.1.1 補題　Aをブール代数として，すべての $i\in I$ に対し f_i を A から B_i への準同型とする．このとき，A から $\prod_{i\in I} B_i$ への準同型 f ですべての $i\in I$ に対し $p_i\circ f=f_i$ を満たすものが一意に存在する．

更に，P をブール代数として，すべての $i\in I$ に対し $\pi_i : P\to B_i$ を準同型

とする．このとき任意のブール代数 A と A から B_i への準同型の族 $(f_i)_{i\in I}$ に対し，A から P への準同型 f で $\pi_i\circ f=f_i$ となるものが一意に存在するなら，P から $\prod_{i\in I}B_i$ への同型写像 g で $p_i\circ g=\pi_i$ がすべての $i\in I$ に対し成り立つようなものが一意に存在する．

証明　最初の命題は，$f(a)=(f_i(a))_{i\in I}$ で定義される写像 $f:A\to\prod_{i\in I}B_i$ によって確かめられる．次に，P と $(\pi_i)_{i\in I}$ が補題の後半のように与えられたとする．このとき，$(\prod_{i\in I}B_i,\ (p_i)_{i\in I})$ の普遍的性質により，準同型 $g:P\to\prod_{i\in I}B_i$ で $p_i\circ g=\pi_i$ となるものがとれる．同様に，$h:\prod_{i\in I}B_i\to P$ を $\pi_i\circ h=p_i$ を満たす準同型とする．このとき，$h\circ g$ はPからPへの準同型で $\pi_i\circ(h\circ g)=\pi_i$ がすべての $i\in I$ で成り立つ．したがって，$h\circ g=id_P$ となる．同様に $C=\prod_{i\in I}B_i$ として $g\circ h=id_C$ がいえるから，g と h は同型写像である．∎

B の部分集合 D は，互いに素でその上限が1であるとき，B の**分割**と呼ばれる．更に，D が0を含まないとき，D は B の**真の分割**と呼ばれる．D は，互いに素な $B\setminus\{0\}$ の部分集合のうち極大なものであるとき，かつそのときに限り，真の分割となる．B の元の族 $(b_i)_{i\in I}$ は，$\sum_{i\in I}b_i=1$ で，異なる $i,j\in I$ に対し $b_i\cdot b_j=0$ となるとき，B の分割と呼ばれる．5.2 でと同じように，B の直積への分解は，B の分割に対応する：

7.1.2 補題　$(b_i)_{i\in I}$ を B の分割として，B を $|I|$-完備とする．このとき B は $\prod_{i\in I}B\upharpoonright b_i$ と同型になる．逆に B がある直積 $\prod_{i\in I}B_i$ と同型なら $B_i\cong B\upharpoonright b_i$ がすべての $i\in I$ で成り立つような，B の分割 $(b_i)_{i\in I}$ が存在する．

証明　$(b_i)_{i\in I}$ をBの分割として，Bを $|I|$-完備とする，このとき，$g(x)=(x\cdot b_i)_{i\in I}$ および $h((x_i)_{i\in I})=\sum_{i\in I}x_i$ で定義される，$g:B\to\prod_{i\in I}B\upharpoonright b_i$ および $h:\prod_{i\in I}B\upharpoonright b_i\to B$ は順序準同型で，互いの逆写像になるから，同型写像である．h の定義は，B が $|I|$-完備であることから可能である．逆に，一般性を失うことなく $B=\prod_{i\in I}B_i$ と仮定する．このとき，B の元 b_i を $b_i(i)=1$, $i\neq j$ なら $b_i(j)=0$, により定義すると，$B\upharpoonright b_i\cong B_i$ となる．∎

X をブール代数 B のストーン空間として，$(b_i)_{i\in I}$ を B の分割とする．$i\in I$ に対し $a_i=s(b_i)$ と定義すると $a_i, i\in I$ は互いに素な X の開閉部分集合

となり，a_i は $B\restriction b_i$ のストーン空間と位相同型になる．I が有限で，たとえば，$I=\{1,\cdots,n\}$ なら $b_1+\cdots+b_n=1$ だから，$a_1\cup\cdots\cup a_n=1$ となる．無限個の b_i が 0 と異なる場合には，X がコンパクトであることから $u=\bigcup_{i\in I}a_i$ は X とは異なる．しかしながら，u は X の稠密な開集合である：もしそうでなければ，$b\in B$ で $s(b)\cap u=\varnothing$ かつ $b>0$ となるものが存在する．つまり，$b\cdot b_i=\varnothing$ がすべての $i\in I$ に対し成り立ち，$(b_i)_{i\in I}$ が B の分割でなくなってしまうからである．

u に X からの相対位相を入れるとき，a_i は u で開集合となるから，u は a_i, $i\in I$ の直和位相空間となる．u が X で稠密であることから，X は u のコンパクト化であると考えることができる．より正確には，次の命題が成立する：

7.1.3 命題 $(B_i)_{i\in I}$ をブール代数の族とし，$i\in I$ に対し X_i を B_i のストーン空間とする．更に，X を $B=\prod_{i\in I}B_i$ のストーン空間とする．このとき，X は，X_i の直和空間のストーン・チェク・コンパクト化と位相同型になる．

証明 $(b_i)_{i\in I}$ を，直積への分解 $B=\prod_{i\in I}B_i$ に対応する B の分割とし，上と同じように，$a_i=s(b_i)$，$u=\bigcup_{i\in I}a_i$ と定義する．X が u のストーン・チェク・コンパクト化であることは，位相空間論で知られているように，次のことから結論できる：A と B を互いに素な u の閉部分集合とするとき，X の互いに素な開閉部分集合 A'，B' で $A\subseteq A'$，$B\subseteq B'$ となるものがある．

これを示そう．$i\in I$ に対し，$A\cap a_i$ と $B\cap a_i$ は，ブール空間 a_i の互いに素な閉部分空間であるから，補題 4.1.1 により，$B\restriction b_i$ の元 c_i で，$A\cap a_i\subseteq s(c_i)$，$B\cap a_i\subseteq s(b_i\cdot -c_i)$ となるものがとれる．$c_i\leqslant b_i$ だから，$B=\prod_{i\in I}B_i$ での和 $c=\sum_{i\in I}c_i$ が存在する．

$A'=s(c)$，$B'=s(-c)$ とすれば，たとえば，$A=\bigcup_{i\in I}(A\cap a_i)\subseteq\bigcup_{i\in I}s(c_i)\subseteq s(c)=A'$ となるから，これが求めるものである． ▮

補題 7.1.2 により，完備ブール代数 B に対し，その直積への分解は，B の分割に対応するが，このことは，完備ブール代数に関する多くの定理の証明において，重要な役割りを果たす．以下に述べる結果は，直積への分解の有用性の一端を示している．

ブール代数の全体のクラスから基数の全体のクラスへの写像 φ を**基数関数**と呼ぶことにしよう．更に φ は，A と B が同型なとき，常に $\varphi(A)=\varphi(B)$ を満たすようなものとする．$b\in B$ に対し常に $\varphi(B\restriction b)\leqslant\varphi(B)$ が成り立つとき，つまり，B の直積の因子に対する φ の値が常に小さくなるとき，φ を**単調基数関数**と呼ぶ．すべての $b\in B\setminus\{0\}$ に対し $\varphi(B)=\varphi(B\restriction b)$ となるとき，B は，**φ-一様**であるという．B を固定するとき，$\varphi(B\restriction b)$ の代りに単に $\varphi(b)$ とも書くことにする．$b\in B$ は，$B\restriction b$ が φ-一様なとき，**φ-一様**であるという．

7.1.4 補題　$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ を有限個の単調基数関数として，B をブール代数とする．このとき，集合

$$D=\{b\in B\setminus\{0\}\mid b \text{ は } \varphi_1,\cdots,\varphi_n \text{ に関して一様}\}$$

は B で稠密である．B が完備なら，B は $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ に関して一様なブール代数の直積となる．

証明　$D_k=\{b\in B\setminus\{0\}\mid b \text{ は } \varphi_k\text{-一様}\}$ として，$D=\bigcap_{k=1}^{n}D_k$ である．$b\in D_k$ で $0<c\leqslant b$ なら，$c\in D_k$ であることに注意しよう．任意の $a\in B\setminus\{0\}$ に対し，b を $B\restriction a\setminus\{0\}$ の元のうちで φ_k が最小な値をとるものとすれば，明らかに c は D_k の元となるから，D_k は B で稠密である．このことから，D も B で稠密となることが分かる：任意の $b\in B\setminus\{0\}$ に対し，$b_k\in D_k$ を帰納的にとって，$b\geqslant b_1\geqslant b_2\cdots\geqslant b_n$ となるようにすれば，b_n は D の元になるからである．次に，B を完備としよう．D は B で稠密だから，B の分割 $(b_i)_{i\in I}$ で $b_i\in D$ となるものがある．このとき，$B\cong\prod_{i\in I}B\restriction b_i$ は，B の $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$-一様な因子への直積分解になる．　∎

7.1.5 定理　すべての完備な無限ブール代数 B に対し，$|B|^{\omega}=|B|$ が成り立つ．

証明　基数関数 φ を $\varphi(B)=|B|$ で定義すると，φ は単調となる．補題 7.1.4 により，$B\cong\prod_{i\in I}B_i$ を B の φ-一様な因子への直積分解とする．このとき，$i\in I$ に対し $|B_i|=2$ または，$|B_i|\geqslant\omega$ だが，J を $|B_i|=2$ となる $i\in I$ の全体の集合とすると，

$$B\cong\prod_{i\in J}B_i\times\prod_{i\in I\setminus J}B_i$$

となるから,

$$|B|=\max(|\prod_{i\in J}B_i|,\ |\prod_{i\in I\setminus J}B_i|)$$

である.

$|B|=|\prod_{i\in J}B_i|$ なら, J は無限集合でなければならないから, たとえば, 濃度 λ を持つとして, $|B|=2^\lambda$ となる. したがって, 定理の主張が成り立つ. そうでなければ, $|B|=|\prod_{i\in I\setminus J}B_i|$ となるが, 各 $i\in I$ に対し B_i は完備で無限だから, 補題 7.1.2 と補題 2.3.2 により, 各 B_i は可算無限個の自明でない因子の直積 $B_i\cong\prod_{n\in\omega}B_{in}$ に分解される. B_i は φ- 一様だったから, $\kappa_i=|B_i|$ として $\kappa_i=|B_{in}|$ がすべての $n\in\omega$ に対し成り立つ. したがって $\kappa_i=\kappa_i{}^\omega$ となり, $|B|=|\prod_{i\in I\setminus J}B_i|=\prod_{i\in I\setminus J}\kappa_i=\prod_{i\in I\setminus J}\kappa_i{}^\omega=(\prod_{i\in I\setminus J}\kappa_i)^\omega$ が成り立つ. ▮

例 7.1.1 $\kappa^\omega=\kappa$ を満たすすべての基数 κ に対して, $|B|=\kappa$ となる完備ブール代数 B が存在する. B として濃度 κ の自由生成系を持つ自由ブール代数の完備化をとればよい. $|F|=\kappa$ だから, $|B|\geqslant\kappa$ は明らかだが, B は濃度 κ を持つことが 7.3 で証明される. ▮

σ-完備ブール代数に対しては, 次に述べるようなカントル・ベルンシュタインの定理に似た命題が成り立つ:

7.1.6 補題 B を σ-完備として, c, b, a を B の元で $c\leqslant b\leqslant a$ を満たすものとする. このとき, $B\restriction c$ と $B\restriction a$ が同型なら, $B\restriction b$ と $B\restriction a$ も同型になる.

証明 $f: B\restriction a\to B\restriction c$ を同型写像とする. B の元 a_n, b_n を

$$a_0=a,\qquad b_0=b,$$
$$a_{n+1}=f(a_n),\qquad b_{n+1}=f(b_n)$$

により定義する. $b_0=b\leqslant a=a_0$ で $a_1=f(a_0)=f(a)=c\leqslant b=b_0$, また, $a_{n+1}\leqslant b_n\leqslant a_n$ なら, f の単調性から, $a_{n+2}\leqslant b_{n+1}\leqslant a_{n+1}$ となるから,

$$\cdots a_2\leqslant b_1\leqslant a_1\leqslant b_0\leqslant a_0$$

である. B は σ-完備だから, $r=\prod^B_{n\in\omega}a_n=\prod^B_{n\in\omega}b_n$ が存在する. このとき,

$$a=(a_0\cdot -b_0)\dot{+}(b_0\cdot -a_1)\dot{+}(a_1\cdot -b_1)\dot{+}\cdots\dot{+}r,$$
$$b=(b_0\cdot -a_1)\dot{+}(a_1\cdot -b_1)\dot{+}\cdots\dot{+}r$$

だが，これと B が σ-完備であることから，

$$B\restriction a\cong\prod_{n\in\omega}B\restriction(a_n\cdot -b_n)\times\prod_{n\in\omega}B\restriction(b_n\cdot -a_{n+1})\times B\restriction r,$$
$$B\restriction b\cong\prod_{n\in\omega}B\restriction(a_{n+1}\cdot -b_{n+1})\times\prod_{n\in\omega}B\restriction(b_n\cdot -a_{n+1})\times B\restriction r$$

となる．ところが，$f(a_n\cdot -b_n)=a_{n+1}\cdot -b_{n+1}$ だから，$B\restriction(a_n\cdot -b_n)$ と $B\restriction(a_{n+1}\cdot -b_{n+1})$ は同型である． ▮

ブール代数 B は，すべての $b\in B\setminus\{0\}$ に対し $B\restriction b$ が B と同型になるとき，**一様**であるという．自明なブール代数および2元ブール代数は一様である．$|B|\geqslant 4$ となる一様なブール代数は，無原子的である．

例 7.1.2 $\kappa\geqslant\omega$ として，濃度 κ の自由生成系上の自由ブール代数 F は一様である：$|I|=\kappa$ として $X=2^I$ を F の双対空間とする．任意の空でない X の開閉部分空間と X 自身が位相同型になることを示せばよい．$X\cong 2\times X=(\{0\}\times X)\dot{\cup}(\{1\}\times X)$ だから，2つの（あるいは，有限個の）X と位相同型な空間の直和空間は，再び X と位相同型になる．$u\subseteq X$ が空でなく，開閉集合であるときには，基本開集合 $u_1, \cdots, u_n$ で $u=u_1\dot{\cup}\cdots\dot{\cup}u_n$ となるものがとれる．それぞれの u_i は，ある有限な $e_i\subseteq I$ と $f_i: e_i\to 2$ によって $u_i=\{x\in X \mid x\restriction e_i=f_i\}$ と表わせるから，$u_i\cong 2^{I\setminus e_i}\cong 2^I=X$ となり，$u\cong X$ がいえる． ▮

例 7.1.3 A が一様なら，A の完備化 B も一様である：$a\in A\setminus\{0\}$ に対し $A\restriction a$ は $B\restriction a$ で稠密で，B で稠密な A と同型になるから，$B\cong B\restriction a$ である．さて，$b\in B\setminus\{0\}$ を任意にとるとき，$0<a\leqslant b$ となる $a\in A$ をとれば，$B=B\restriction 1\cong B\restriction a$ だから，補題 7.1.6 により，$B\cong B\restriction b$ である． ▮

7.1.7 補題 $|B|\neq 4$ とする．すべての $a, b\in B$ で $0<a, b<1$ となるものに対し，B の自己同型 h で $h(a)=b$ となるものがあるとき，かつ，そのときに限り，B は一様になる．

証明 まず B を一様として，$0<a, b<1$ とする．このとき，$B\restriction a\cong B\cong B\restriction b$，同様に $B\restriction -a\cong B\restriction -b$ が成り立つから，$f: B\restriction a\to B\restriction b$ および $g: B\restriction -a\to B\restriction -b$ を同型写像とする．$h: B\to B$ を $h(x)=f(x\cdot a)\dot{+}g(x\cdot -a)$ で定義すれば，h は B の自己同型で $h(a)=b$ が成り立つ．逆に，すべての

$a, b \in B$ で $0<a, b<1$ となるものに対し，$h(a)=b$ となる B の自己同型 h が存在するとしよう．このとき，すべての $a, b \in B$ で $0<a, b<1$ となるものに対し，$B \upharpoonright a \cong B \upharpoonright b$ が成り立つ．$|B| \leqslant 2$ なら B が一様になることは自明だから，$|B| \geqslant 8$ とする．また，$b \in B \setminus \{0\}$ として，$b=1$ なら $B \upharpoonright 1 \cong B$ は明らかだから，$b<1$ とする．$|B| \geqslant 8$ により，$a, x, y \in B$ で，$0<a<1$，$a=x \dot{+} y$，$0<x, y$ となるものがある．このとき，

$$B \upharpoonright b \cong B \upharpoonright a \cong B \upharpoonright x \times B \upharpoonright y,$$

$$B \cong B \upharpoonright a \times B \upharpoonright -a \cong B \upharpoonright x \times B \upharpoonright y$$

となるから $B \upharpoonright b \cong B$ が成り立つ．▮

ブール代数 B は，id_B 以外に自己同型を持たないとき，**硬い**という．

7.1.8 補題 $a, b \in B \setminus \{0\}$ で $a \cdot b=0$ かつ $B \upharpoonright a \cong B \upharpoonright b$ となるようなものが存在しないとき，かつそのときに限り，B は硬いブール代数となる．

証明 $a, b \in B \setminus \{0\}$ が $a \cdot b=0$ かつ $B \upharpoonright a \cong B \upharpoonright b$ を満たすとして，$\varphi : B \upharpoonright a \to B \upharpoonright b$ を同型写像とする．このとき，

$$h(x)=\varphi(a \cdot x) \dot{+} \varphi^{-1}(b \cdot x) \dot{+} (-a \cdot -b) \cdot x$$

で $h : B \to B$ を定義すれば，h は $h(a)=b$ を満たす自己同型になる．逆に，h を id_B と異なる A の自己同型とする．$c \in B$ を $c \neq h(c)$ となるものとする．一般性を失うことなく $c \not\leqslant h(c)$ としてよい．このとき，$a=c \cdot -h(c)$，$b=h(a)$ とすれば，$a, b>0$，$a \cdot b=0$ かつ $B \upharpoonright a \cong B \upharpoonright b$ となる．▮

B は，すべての $b \in B \setminus \{0\}$ に対し $B \upharpoonright b$ が一様でも硬くもないとき，**一様な因子も硬い因子も持たない**という．A と B とは，$a \in A \setminus \{0\}$ と $b \in B \setminus \{0\}$ で $A \upharpoonright a \cong B \upharpoonright b$ となるようなものがないとき，**完全に異なる**という．

7.1.9 命題 すべての完備ブール代数 B に対し，直積分解 $B \cong H \times S \times R$ で，H は一様な因子の直積，S は硬い因子の直積，R は一様な因子も硬い因子も持たないようなものがある．H, S, R は，このとき，同型を除いて一意に決まる．

証明

$D=\{b \in B \setminus \{0\} \mid B \upharpoonright b$ は一様か，硬いか，一様な因子も硬い因子も持

たない}

とする．D は，B で稠密であるから，$P\subseteq D$ を B の分割とする．

$$X=\{p\in P \mid B\restriction p \text{ は一様}\},$$
$$Y=\{p\in P \mid B\restriction p \text{ は硬い}\},$$
$$h=\dot{\sum}X,\ s=\dot{\sum}Y,\ r=-(h+s)$$

とおき，$H=B\restriction h$，$S=B\restriction s$，$R=B\restriction r$ とすればよい．一意性を示すためには，$B\cong H'\times S'\times R'$ を上のような性質を満たす別の分解とし，$h', r', s'\in B$ を $H'\cong B\restriction h'\cdots$ となるものとする．このとき，B' と S あるいは R は完全に異なるから，$B\restriction h'$ は $B\restriction s$ および $B\restriction r$ と完全に異なる．したがって $h'\cdot(r+s)=0$ となり，$h\dot{+}r\dot{+}s=1$ だから，$h'\leqslant h$ となる．同様に $h\leqslant h'$ もいえて，これから $h=h'$ が分かる．$s=s'$，$r=r'$ も同様に示せる．　▮

ほとんどすべての“自然な”完備ブール代数 B では，R と S は自明になる．つまり，B は一様な因子の直積となっている．しかし，ZFC の中で，硬い完備ブール代数，あるいは，一様な因子も硬い因子も持たない完備ブール代数が存在することが示せる（証明は，かなり難しい）．

7.1 の演習問題

7.1.1　I を無限集合として，各 $i\in I$ に対し A_i は自明でないブール代数とする．$\prod_{i\in I}A_i$ の部分ブール代数

$$A=\prod_{i\in I}{}^{\omega}A_i=\{(a_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}A_i \mid |\{i\in I \mid a_i\neq 0\}|<\omega \text{ または } |\{i\in I \mid a_i\neq 1\}|<\omega\}$$

は，$(A_i)_{i\in I}$ の**弱直積**と呼ばれる．一般性を失うことなく，各 A_i の双対空間 X_i は互いに素であるとしてよい．$X=\bigcup_{i\in I}X_i$ を $(X_i)_{i\in I}$ の直和位相空間として，A の双対空間が X の一点コンパクト化と同型になることを示せ．

7.1.2　B を完備ブール代数として，各 $n\in N$ に対し P_n を B の分割で以下の（1）〜（4）を満たすものとする：

（1）　$|P_0|=\kappa$

（2）　P_{n+1} は P_n の細分である．つまり，すべての $v\in P_{n+1}$ に対し，$v\leqslant u$ となる $u\in P_n$ が一意に存在する

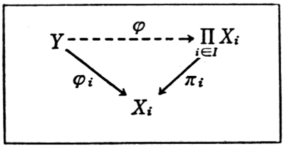
（3）　すべての $u\in P_n$ に対し $|\{v\in P_{n+1} \mid v\leqslant u\}|=\kappa$

（4）　$\bigcup_{n\in N}P_n$ は B の稠密な部分集合になる．

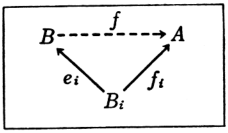
このとき，B は，6.2 のガイフマン・ハレス代数 $RO(\kappa^{\omega})$ と同型になる．

7.2 ブール代数の補積

添数集合 I の各元 i に対し X_i をブール空間として，X を X_i の直積空間とする．$i\in I$ に対し，$\pi_i((x_i)_{i\in I})=x_i$ で定義される射影 $\pi_i: X\to X_i$ は，連続な開写像となるが，7.1 でと同じようにして，$(X,(\pi_i)_{i\in I})$ は同型を除いて次の性質により特徴づけられることが示せる：Y をブール空間として，各 i に対し φ_i を Y から X_i への連続写像とするとき，Y から $\prod_{i\in I}X_i$ への連続写像 φ で $\pi_i\circ\varphi=\varphi_i$ がすべての $i\in I$ に対し成り立つものが一意に存在する．



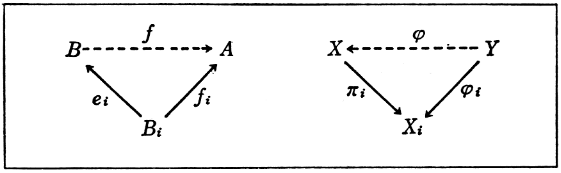
$(B_i)_{i\in I}$ をブール代数の族とする．この族の**補積**（**自由積**ともいう）を，圏の意味で上記の性質の双対によって定義する．つまり，B をブール代数，e_i を B_i から B への準同型として，$(B,(e_i)_{i\in I})$ は次の性質を満たすとき，$(B_i)_{i\in I}$ の補積と呼ばれる：任意のブール代数 A と，B_i から A への準同型の族 $(f_i)_{i\in I}$ に対し，B から A への準同型 f で，すべての $i\in I$ に対し $f\circ e_i=f_i$ を満たすものが一意に存在する．



補題 7.1.1 でと同じように，$(B_i)_{i\in I}$ の 2 つの補積は互いに同型になることが示せる．

7.2.1 命題 すべてのブール代数の族 $(B_i)_{i\in I}$ に対し，その補積 $(B,(e_i)_{i\in I})$ が存在して，B は $Clop(\prod_{i\in I}St(B_i))$ と同型になる．

証明 各 $i\in I$ に対し X_i を B_i のストーン空間として，X をその直積空間 $\prod_{i\in I}X_i$ として，π_i を X から X_i への射影とする．B を X に双対なブール代数として $e_i: B_i\to B$ を $\pi_i: X\to X_i$ に双対な準同型とする（より正確には 4.2 での表記法により，$C=B_i$ として $e_i=A(\pi_i)\circ s_C$ である）．π_i は上射



だから e_i は単射になる．

$(B,(e_i)_{i\in I})$ が $(B_i)_{i\in I}$ の補積になることを示そう：ブール代数 A と準同型 $f_i: B_i\to A$ が与えられたとしよう．Y を A の双対空間，$\varphi: Y\to X_i$ を f_i に双対な連続写像とする．このとき，$\varphi: Y\to X=\prod_{i\in I} X_i$ をすべての $i\in I$ に対し $\pi_i\circ\varphi=\varphi_i$ を満たす連続写像として，$f: B\to A$ をそれに双対な準同型（より正確には，$s_A^{-1}\circ A(\varphi)$）とすれば，すべての $i\in I$ に対し，$f\circ e_i=f_i$ が成り立つ．f が一意に決まることも，同様に示せる．　■

ブール代数の族 $(B_i)_{i\in I}$ の補積を $\bigoplus_{i\in I} B_i$ と表わすことにしよう．$I=\{1,\cdots,n\}$ のときには，$B_1\oplus\cdots\oplus B_n$ とも書くことにする．e_i は単射だったから，一般性を失うことなく，B_i は $\bigoplus_{i\in I} B_i$ の部分ブール代数で e_i は B_i 上の恒等写像であると仮定してよい．次の命題は，補積のより内部的な特徴づけを与える．ブール代数 B の部分ブール代数の族 $(B_i)_{i\in I}$ は，互いに異なる添数 $i(1),\cdots,i(n)\in I$ と $b_{i(1)}\in B_{i(1)}\setminus\{0\},\cdots,b_{i(n)}\in B_{i(n)}\setminus\{0\}$ に対し，常に $b_{i(1)}\cdot\cdots\cdot b_{i(n)}>0$ が成り立つとき，**独立**であるという．

7.2.2 命題　$(B_i)_{i\in I}$ をブール代数 B の部分ブール代数の族とする．B は（より正確には，$(B,(id_{B_i})_{i\in I})$ は），B が $(B_i)_{i\in I}$ から生成され，$(B_i)_{i\in I}$ が独立なとき，かつ，そのときに限り，$(B_i)_{i\in I}$ の補積となる．

証明　B を $(B_i)_{i\in I}$ の補積とする．上記の性質を $C=Clop(\prod_{i\in I} St(B_i))$ と $C_i=e_i[B_i]$，$i\in I$ が満たすことを示せばよい．$(C_i)_{i\in I}$ が C で独立であることは明らかだが，$(C_i)_{i\in I}$ は $\prod_{i\in I} St(B_i)$ の準基をなすから，C を生成する．

逆に，$(B_i)_{i\in I}$ を B を生成する独立なブール代数の族とする．$i\in I$ に対し，$f_i: B_i\to A$ を準同型とする．このとき，$f: B\to A$ で $f\circ e_i=f_i$，つまり，$h=\bigcup_{i\in I} f_i\subseteq f$ を満たす準同型が一意に存在することを，補題 3.2.1 を用いて示す．そのためには，$X=\bigcup_{i\in I} B_i$ の有限部分集合 M に対し，$e: M\to\{+1,-1\}$ として，$\prod_{m\in M} e(m)\cdot m=0$ なら $\prod_{m\in M} e(m)\cdot h(m)=0$ となることが示せればよい．互いに異なる $i(1),\cdots,i(n)\in I$ で，$M(k)=M\cap B_{i(k)}$ として，$M=\bigcup_{k=1}^{n} M(k)$ となるものをとる．このとき，$(B_i)_{i\in I}$ は独立だから，$\prod_{m\in M(k)} e(m)\cdot m=0$ となる k がある．$f_{i(k)}$ は準同型だったから，

$$\prod_{m\in M} e(m)\cdot h(m) \leqslant \prod_{m\in M(k)} e(m)\cdot h(m)$$
$$= \prod_{m\in M(k)} e(m)\cdot f_{i(k)}(m)$$
$$=0$$

である. ▮

B を部分ブール代数の族 $(B_i)_{i\in I}$ の補積とする. $i, j\in I$, $i\neq j$ に対し, $(B_i)_{i\in I}$ が独立であることから, $B_i\cap B_j=\{0,1\}$ となる. したがって, 系 3.1.4 により, B の元は, 初等積 $b_{i(1)}\cdot\cdots\cdot b_{i(n)}$ で $n\in \boldsymbol{N}$, $b_{i(k)}\in B_{i(k)}\setminus\{0\}$, かつ $i(1),\cdots,i(n)$ は互いに異なるようなものの有限和として表わされる. 特に, 補積 $A\oplus B$ の元は, $n\in \boldsymbol{N}$, $a_i\in A\setminus\{0\}$, $b_i\in B\setminus\{0\}$, $a_i\cdot b_i\neq 0, 1\leqslant i\leqslant n$ として, $a_1\cdot b_1+\cdots+a_n\cdot b_n$ の形に表わされる. F を集合 $U=\{u_i \mid i\in I\}$ 上の自由ブール代数としよう. ここに, u_i は互いに異なると仮定する. このとき, 部分ブール代数 $F_i=\{0,1,u_i,-u_i\}$ は, 4 元ブール代数 $\boldsymbol{4}=P(\{0,1\})$ と同型になる. U は 4.3 の意味で独立だから, $(F_i)_{i\in I}$ は独立となり, F を生成する. したがって F は, $F_i\cong \boldsymbol{4}$ として $\bigoplus_{i\in I} F_i$ と考えることができる.

7.2 の演習問題

7.2.1 $i\neq j$ なら, $\bigoplus_{i\in I} B_i$ の部分ブール代数 B_i, B_j に対し, $B_i\cap B_j=\{0,1\}$ が成り立つ. ブール代数 C とその部分ブール代数 A, B で, $A\cap B=\{0,1\}$ だが, A と B は C で独立でないものを構成せよ.

7.2.2 任意のブール代数 A, B, C で

$$A\oplus(B\times C)\cong(A\oplus B)\times(A\oplus C)$$

が成り立つ. すべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対し,

$$A\oplus \boldsymbol{2}^n\cong A^n$$

が成り立つ.

7.2.3 A または B の $A\oplus B$ への自然な埋込みは完備である.

7.2.4 A と B が無限ブール代数のとき, $A\oplus B$ は σ-完備ではない.

7.3 連 鎖 条 件

ブール代数 B に対し, B の胞度 $c(B)$ を

$$c(B)=\sup\{|D| \mid D\subseteq B\setminus\{0\},\ D \text{ は互いに素}\}$$

で定義する．同様に，位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対し，

$$c(X)=\sup\{|U| \mid U\subseteq\mathcal{O}\setminus\{\varnothing\},\ U\text{ は互いに素}\}$$

とする．A が B の稠密な部分ブール代数であるときには，明らかに，$c(A)=c(B)$ が成り立つ．また，すべてのブール代数 B に対し，$c(B)=c(St(B))$ であること，およびすべての位相空間 X に対し，$c(X)=c(RO(X))$ となることも容易に示せる．後者については，X の互いに素な開集合 u, v に対し，u^{hi}, v^{hi} が互いに素な正則開集合になることに注意すればよい．以上により，胞度に関する考察は，完備ブール代数，あるいは位相空間について行なえば十分であることが分かる．

B は，$c(B)\leqslant\kappa$ となるとき，**κ-連鎖条件**を満たすという．位相空間 X に対しても同様に κ-連鎖条件が定義される．B は，すべての互いに素な $D\subseteq B\setminus\{0\}$ が $|D|<\kappa$ となるとき，$<\kappa$-連鎖条件を満たすという（X についても同様）．$\aleph_0$-連鎖条件を，**可算連鎖条件**，あるいは ccc (countable chain condition) とも呼ぶ．連鎖条件という命名は，以下の理由による：$(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ を B の真の上昇連鎖とする．つまり，すべての $\alpha<\beta<\kappa$ に対し $b_\alpha<b_\beta$ が成り立つとする．このとき，$D=\{b_{\alpha+1}\cdot -b_\alpha \mid \alpha<\kappa\}$ は $B\setminus\{0\}$ の互いに素な部分集合となり，$|D|=\kappa$ が成り立つ．逆に，$D\subseteq B$ が互いに素で，$|D|=\kappa$，たとえば $D=\{d_\alpha \mid d<\kappa\}$ として，B が $<\kappa$-完備なら，$K=\{\sum_{\beta<\alpha}{}^B d_\beta \mid \alpha<\kappa\}$ は順序型 κ を持つ B の上昇連鎖となる．

7.3.1 補題 B をブール代数として，X をそのストーン空間とする．このとき，下の命題 a)～d) に対し，a)⇒b)⇒c)⇒d) が成り立つ．それぞれの ⇒ について逆は成り立たない．

a）B は可算，つまり，X は第2可算公理を満たす，

b）B は稠密な可算部分集合を持つ，

c）X は稠密な可算部分集合を持つ，

d）B と X は ccc を満たす．

証明 a)⇒b)：自明．b)⇒c)：一般性を失うことなく $B=Clop(X)$ としてよい．$D\subseteq B\setminus\{0\}$ を可算で稠密とする．各 $u\in D$ に対し，$x_u\in u$ を選ぶ．このとき，$X_0=\{x_u \mid u\in D\}$ は X の可算で稠密な部分集合となる．c)⇒d)：$(u_i)_{i\in I}$ を互いに素な X の空でない開部分集合の族として，$|I|\leqslant\aleph_0$ を示す．

$D \subseteq X$ を可算で稠密とする．各 $i \in I$ に対し，$x_i \in D \cap u_i$ を選ぶと，写像 $I \to D\,;\, i \mapsto x_i$ は1対1となるから，$|I| \leqq \aleph_0$ である．b)$\not\Rightarrow$a)：A を $|A| = \aleph_0$ となるブール代数として，B をその完備化とする．このとき，命題 2.3.2 から，$|B| = 2^{\aleph_0}$ である．c)$\not\Rightarrow$b) および d)$\not\Rightarrow$c) は次の例 7.3.1 により示せる． ∎

例 7.3.1 2^X を集合 X 上のカントル空間とする．このとき，

i) 2^X は ccc を満たす．

ii) 2^X は，$|X| \leqq 2^{\aleph_0}$ となるとき，かつそのときに限り，稠密な可算部分集合を持つ．

iii) $Clop(2^X)$（濃度 $|X|$ の自由生成系上の自由ブール代数）は，$|X| \leqq \aleph_0$ となるとき，かつ，そのときに限り，稠密な可算部分ブール代数を持つ．

証明 i)：系 7.3.8 による．ii) $\Leftarrow$)：$D \subseteq 2^X$ を稠密な可算部分集合とすると，写像 $Clop(2^X) \to P(D)\,;\, a \mapsto a \cap D$ は1対1となり，したがって $|Clop(2^X)| = |X| \leqq 2^{\aleph_0}$ となる．$\Rightarrow$)：$|X| \leqq 2^{\aleph_0}$ とする．$|Y| \leqq |X|$ なら 2^Y は 2^X の連続写像による像となる．よって，2^X が稠密な可算部分集合を持てば，2^Y も稠密な可算部分集合を持つ．したがって，$|X| = 2^{\aleph_0}$ について主張が示せればよい．一般性を失うことなく，$X = St(F)$ とする．ここに，F は濃度 $\aleph_0$ の自由ブール代数であるとする．$a \in F$ に対し，

$$p_a : X \to 2$$

$$p_a(x) = \begin{cases} 1, & a \in x \text{ のとき} \\ 0, & a \notin x \text{ のとき} \end{cases}$$

として，$D = \{p_a \mid a \in F\}$ と置くと，D は可算となるが，更に，D は 2^X で稠密であることを示そう：$x_1, \cdots, x_n$，$y_1, \cdots, y_m$ を互いに異なる X の元とする．このとき，$a \in F$ で $p_a \in \{p \in 2^X \mid p(x_1) = \cdots = p(x_n) = 1, p(y_1) = \cdots = p(y_m) = 0\}$ となるものがあることが示せればよいが，これは，$a \in (x_1 \cap \cdots \cap x_n) \setminus (y_1 \cup \cdots \cup y_m)$ と同値であり，このような a は，補題 2.3.1 により常に存在する．iii) $\Rightarrow$)：自明である．$\Leftarrow$)：$\kappa > \aleph_0$ として，F を $|U| = \kappa$ となる U 上の自由ブール代数とする．F が可算で稠密な部分集合を持たないことを示そう．$M \subseteq F \setminus \{0\}$ を可算とする．各 $m \in M$ に対し，U の有限部分集

合 U_m で $m\in[U_m]$ となるものをとる．$|U|=\kappa>\aleph_0$ だったから，$u\in U\setminus\bigcup_{m\in M}U_m$ が存在する．どの $m\in M$ に対しても $u\in U\setminus U_m$により，$m\cdot -u>0$ となり，$m\not\leqslant u$ である．したがって，M は F で稠密でない． ▮

7.3.2 補題 B をブール代数として，$M\subseteq B$ とする．このとき，$M'\subseteq M$ で，$|M'|\leqslant c(B)$ を満たし，M と M' が同じ上界を持つようなものが存在する．特に，$\sum^B M$ あるいは $\sum^B M'$ が存在するときには，M と M' は同じ上限を持つ．B は $c(B)$-完備なら，完備である．特に，すべての ccc を満たす σ-完備ブール代数は完備である．

証明 十分に完備な B に対しては，補題 6.1.4 により，既に明らかである．一般には，次のように証明できる：ツォルンの補題により，

$M'\subseteq M$

$f: M'\to B$

$m\in M'$ に対し，$0<f(m)\leqslant m$

$m,n\in M'$，$m\neq n$ に対し $f(m)\cdot f(n)=0$

を満たす，成分ごとの包含関係に関して極大な対 (M',f) が存在する．f が 1 対 1 であることから，$|M'|\leqslant c(B)$ である．$b\in B$ を M' の上界とする．b が M の上界でなかったとすれば，$m\in M\setminus M'$ で $m\not\leqslant b$ となるものがあるが，$M''=M'\cup\{m\}$，$f'=f\cup\{(m,m\cdot -b)\}$ とすれば，(M'',f'') は (M',f') の真の拡張となっているから，(M',f') の極大性に矛盾する．したがって，M' が求めるものであることが分かる． ▮

B の互いに素な部分集合 D で $|D|=c(B)$ となるものがあるとき，$c(B)$ は**実現される**という．下の定理 7.3.4 により，ある条件のもとでは，$c(B)$ は必ず実現される．しかし，系 7.3.9 により，このことは一般には成り立たない．

7.3.3 補題 B を完備ブール代数として，$X\subseteq B$ を $|X|\geqslant 2$ を満たすものとする．X により完備に生成される B の部分ブール代数 A の濃度は高々 $|X|^{c(B)}$ である．更に，$c(B)$ が実現されない場合には，高々，$|X|^{<c(B)}$ となる．

証明 補題 7.3.2 により，A は，X により生成される B の $c(B)$-完備部

分ブール代数と一致する．後者の濃度が，高々，$|X|^{c(B)}$ であることは，練習問題 6.2.1 により示される． ∎

B を任意のブール代数とするとき，ツォルンの補題により，互いに素な B の部分集合は，B の分割に拡張できることから，

$$c(B)=\sup\{|M| \mid M\subseteq B,\ B \text{ は } M \text{ の真の分割}\}$$

が成り立つ．次の定理ではこのことに注意しよう．

M と N が B の分割で，すべての $n\in N$ に対し $m\in M$ で，$n<m$ となるものがあるとき，N は M の**細分**と呼ばれる．

7.3.4 定理（エルデシュ・タルスキー） ブール代数 B に対し，胞度 $c(B)$ が特異基数なら，$c(B)$ は実現される．

証明 $\lambda=c(B)$ を特異基数として，$\kappa=cf(\lambda)$ とする．各 $\alpha<\kappa$ に対し基数 λ_α を選んで，すべての $\alpha<\beta<\kappa$ に対し $\lambda_\alpha<\lambda_\beta<\lambda$，かつ，$\sup_{\alpha<\kappa}\lambda_\alpha=\lambda$ となるようにする．$b\in B\backslash\{0\}$ に対し，$c(B\restriction b)$ を $c(b)$ で表わすことにしよう．$B\restriction b$ の互いに素な部分集合は，B でも互いに素になるから，c は，7.1 での意味で，単調基数関数となる．したがって，補題 7.1.4 により，

$$D=\{b\in B\backslash\{0\} \mid b \text{ は } c\text{-一様}\}$$

は，B で稠密となる．

場合 1 $b\in D$ で $c(b)=\lambda$ となるものがある： このときには，$B\restriction b$ の互いに素な部分集合 X で $|X|=\lambda$ となるものを次のように構成できる．$\kappa<\lambda=c(b)$ であるから，$(B\restriction b)\backslash\{0\}$ の互いに素な部分集合 $\{b_\alpha \mid \alpha<\kappa\}$ がとれる．$c(b_\alpha)=c(b)=\lambda$ で $\lambda_\alpha<\lambda$ だから，$B\restriction b_\alpha\backslash\{0\}$ の互いに素な部分集合 X_α で $|X_\alpha|=\lambda_\alpha$ となるものがある．$X=\bigcup_{\alpha<\kappa}X_\alpha$ とすればよい．

D は B で稠密だから，補題 2.4.2 により，$M\subseteq D$ で B の分割になっているものがある．

場合 1 が成り立たないときには，$c(m)<\lambda$ がすべての $m\in M$ に対し成立する．

場合 2 基数 $\mu<\lambda$ で，すべての $m\in M$ に対し，$c(m)\leqslant\mu$ となるものがある： このときには，$|M|=\lambda$ となって，定理が証明される．もしそうでなければ，一般性を失うことなく $|M|\leqslant\mu$ と仮定してよいが，$c(B)=\lambda>\mu$ だから，

B の分割 I で $\mu^+\leqslant|I|$ となるものがとれる．$J=\{m\cdot i \mid m\in M,\ i\in I\}\setminus\{0\}$ とすれば，これは B の分割で，M と I の細分になっている．特に，$|J|\geqslant\mu^+$ である．各 $m\in M$ に対し，$c(m)\leqslant\mu$ だったから，$\{j\in J \mid j\leqslant m\}$ の濃度は高々 μ となり，$|M|\geqslant\mu^+$ がいえるが，これは矛盾である．

場合 3　すべての $m\in M$ に対し $c(m)<\lambda$ だが，$\sup_{m\in M} c(m)=\lambda$ となる：このときには，すべての $\alpha\in\kappa$ に対し互いに異なる M の元 m_α で $c(m_\alpha)>\lambda_\alpha$ となるものが帰納的に選べる．X_α を $B\restriction m_\alpha$ の互いに素な部分集合で，$|X_\alpha|=\lambda_\alpha$ となるものとすれば，$X=\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ は B の互いに素な部分集合で，$|X|=\lambda$ となる．　■

基数 κ は，非可算で正則かつ極限基数，つまり，すべての $\mu<\kappa$ に対し $\mu^+<\kappa$ が成り立つとき，**弱い意味で到達不可能**であるという．このような基数の存在は，ZFC だけからでは証明できない．定理 7.3.4 は，"$c(B)$ が実現されないなら，$c(B)$ は弱い意味で到達不可能である" といい換えられる．$c(B)$ が実現されないとき，$c(B)$ が極限基数であるのは明らかだが，このとき，定理 7.3.4 により，$c(B)$ は正則となり，補題 2.3.2 により，$c(B)$ は $\aleph_0$ と異なるからである．逆に，系 7.3.9 で κ が弱い意味で到達不可能なら，ブール代数 B で，$c(B)=\kappa$ となり $c(B)$ は実現されないようなものが存在することが系 7.3.9 で示される．

さて，次のような問題を考えてみよう：$(B_i)_{i\in I}$ をブール代数の族として，すべて $i\in I$ に対し B_i は互いに素な部分集合で濃度 κ となるものを持たないとする．このとき，$(B_i)_{i\in I}$ の補積 B は濃度 κ の互いに素な部分集合を持ちうるだろうか？　B_i は B の部分ブール代数と考えられるから，少なくとも $c(B_i)\leqslant c(B)$ が成り立つことは明らかである．

$i\in I$ に対し，X_i を B_i の双対空間とすると，B に双対な空間は，直積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ になっているから，われわれの問題は，$\prod_{i\in I} X_i$ は濃度 κ の互いに素な開集合の族を持ちうるか？　といい換えることができる．

実は，この問題においては，I が有限である場合について考察すれば十分であることが系 7.3.7 から分かる．ところが，有限な I についてのこの問題に対する肯定的ないし否定的な答は，集合論の新しい公理を仮定することによっ

て初めて得られる.

κ が特異基数であるときには, 明解な答が容易に得られる： κ を特異基数あるいは $\kappa=\omega$ として $B_i=P(\kappa_i)$ とする. ここに, κ_i は $\kappa_i<\kappa$ となる基数で, $\sup_{i\in I}\kappa_i=\kappa$ を満たすものとする. B_i のすべての互いに素な部分集合の濃度は高々 κ_i となるが, このことから, $c(B)\geqslant\kappa$ となり定理 7.3.4 により, B は濃度 κ の互いに素な部分集合を持つ.

κ が正則である場合には, 次の集合論でよく知られた定理が必要となる.

7.3.5 補題（Δ-レンマ） $\kappa=cf\kappa>\omega$ として, E を濃度 κ の集合で, E の元は有限集合であるとする. このとき, 有限集合 w と $E_0\subseteq E$ で $|E_0|=\kappa$ を満たすものがあって, E_0 の任意の異なる元 e, f に対し $e\cap f=w$ が成り立つ. ▌

7.3.6 命題 $\kappa=cf\kappa>\omega$ として, 直積空間 $X=\prod_{i\in I}X_i$ が濃度 κ の互いに素な開集合の族を持つものとする. このとき, I の有限部分集合 J で $\prod_{i\in J}X_i$ が濃度 κ の互いに素な開集合の族を持つものがある.

証明 U を X の互いに素な空でない開部分集合の族で, 濃度 κ を持つものとする. すべての $u\in U$ は直積空間 X の基本開集合だと仮定してよいから, $u=\prod_{i\in I}V_i^u$ とする. ここに, V_i^u は X_i の開部分集合で, I の有限部分集合 $\mathrm{supp}(u)$ があって, すべての $i\in I\backslash\mathrm{supp}(u)$ に対し, $V_i^u=X_i$ が成り立つものとする. もし, $U_0\subseteq U$ で $|U_0|=|U|$ を満たし, $\mathrm{supp}(u)=\mathrm{supp}(u')$ がすべての $u, u'\in U_0$ に対し成り立つようなものがあれば, $u\in U_0$ に対し $J=\mathrm{supp}(u)$ して, 開集合族 $\{\prod_{i\in J}V_i^u|u\in U_0\}$ は $\prod_{i\in J}X_i$ で互いに素となる. そうでなければ, κ が正則であることから, 集合 $\{\mathrm{supp}(u)\mid u\in U\}$ は濃度 κ を持つ. したがって, $U_0\subseteq U$ で $|U_0|=\kappa$ を満たし, $\mathrm{supp}(u)\neq\mathrm{supp}(u')$ がすべての異なる $u, u'\in U_0$ に対し成り立つものがとれる.

補題 7.3.5 により, $U_1\subseteq U_0$ と有限な $w\subseteq I$ で, $|U_1|=\kappa$ を満たし, $\mathrm{supp}(u)\cap\mathrm{supp}(u')=w$ がすべての異なる $u, u'\in U_1$ に対し成り立つようなものがあるが, $\mathrm{supp}(u)\cap\mathrm{supp}(u')=w$ から, $\prod_{i\in w}V_i^u$ と $\prod_{i\in w}V_i^{u'}$ が, すでに $\prod_{i\in w}X_i$ で互いに素になることが分かり, このことから, $\{\prod_{i\in w}V_i^u\mid u\in U_1\}$ が $\prod_{i\in w}X_i$ での濃度 κ の互いに素な開集合族となる. ▌

7.3.7 系　$\kappa=cf\kappa>\omega$ として，$(B_i)_{i\in I}$ をブール代数の族とする．任意の $n\in N$ と $i(1),\cdots,i(n)\in I$ に対し，$B_{i(1)}\oplus\cdots\oplus B_{i(n)}$ が濃度 κ の互いに素な部分集合を持たないなら，$\bigoplus_{i\in I}B_i$ も濃度 κ の互いに素な部分集合を持たない．特に，すべての $B_{i(1)}\oplus\cdots\oplus B_{i(n)}$ が ccc を満たすなら $\bigoplus_{i\in I}B_i$ も ccc を満たす．　▮

7.3.8 系　カントル空間 2^I は ccc を満たす．

証明　$i\in I$ に対し，B_i を4元ブール代数とする．補積 $B_{i(1)}\oplus\cdots\oplus B_{i(n)}$ は有限だから，ccc を満たす．したがって，系 7.3.7 により，$\bigoplus_{i\in I}B_i$ も ccc を満たす．$\bigoplus_{i\in I}B_i$ は，7.2 で述べたことにより，濃度 $|I|$ の生成系上の自由ブール代数だから，2^I と同型であり，したがって，2^I も ccc を満たす（例 7.3.1 i）を参照）．　▮

κ を無限基数として，F を濃度 κ の生成系上の自由ブール代数とするとき，$|F|=\kappa$ だが，これと ccc，補題 7.3.3，および定理 7.1.5 により，F の完備化は，ちょうど κ^ω 個の元を持つことが分かる（例 7.1.1 を参照）．

7.3.9 系　κ を弱い意味で到達不可能な基数とするとき，ブール代数 B で $c(B)=\kappa$ を満たし，$c(B)$ が実現されないようなものが存在する．

証明　$A=\{\alpha<\kappa \mid \alpha \text{ は基数}\}$ とする．$\alpha\in A$ に対し，$B_\alpha=P(\alpha)$ として，$B=\bigoplus_{\alpha\in A}B_\alpha$ とする．$c(B_\alpha)=\alpha\leqslant c(B)$ だから，$c(B)\geqslant\kappa$ である．$\alpha(1)<\cdots<\alpha(n)\in A$ に対し，$B_{\alpha(1)}\oplus\cdots\oplus B_{\alpha(n)}$ は原子的である（$b_{\alpha(i)}$ を $B_{\alpha(i)}$ の原子元として $b_{\alpha(1)}\cdot\cdots\cdot b_{\alpha(n)}$ の形をしたものが原子元となる）から，$c(B_{\alpha(1)}\oplus\cdots\oplus B_{\alpha(n)}=\alpha_n$ となる．したがって，$B_{\alpha(1)}\oplus\cdots\oplus B_{\alpha(n)}$ は濃度 κ の互いに素な部分集合を持たない．したがって，系 7.3.7 によって，B も濃度 κ の互いに素な部分集合を持たない．特に，$\kappa=c(B)$ が成り立つ．　▮

系 7.3.7 で，ccc が有限個のブール代数の補積または有限個の位相空間の直積に遺伝するか？　という問題が未解決のまま残されたが，これは，もちろん因子が2つの場合について考えれば十分である．この問題に対する答は，集合論をどの公理系で考えるかによって違ってくる：ZFC の公理以外に，特

殊連続体仮説を仮定すると，ccc を満たす位相空間 X_1，X_2 で直積が ccc を満たさないようなものが構成できる．一方，マルティンの公理と特殊連続体仮説の否定からは，ccc は直積空間に遺伝することが証明できる．

7.3 の演習問題

集合 M に対し，$[M]^2$ で，ちょうど 2 つの元を持つ M の部分集合の全体の集合を表わす．C をある集合として，$f:[M]^2\to C$ とする．$X\subseteq M$ は，$f\upharpoonright[X]^2$ が恒等写像となるとき，f-一様であるという．κ が無限基数で，$|M|>2^\kappa$，$|C|\leqslant\kappa$ かつ $f:[M]^2\to C$ のとき，f-一様な $X\subseteq M$ で $|X|>\kappa$ となるものが存在する（**エルデシュ・ラドーの定理**）．

7.3.1 κ を無限基数として，$X_1,\cdots,X_n$ を位相空間で $1\leqslant i\leqslant n$ に対し $c(X_i)\leqslant\kappa$ となるものとする．エルデシュ・ラドーの定理を用いて，$c(X_1\times\cdots\times X_n)\leqslant 2^\kappa$ となることを示せ．

7.3.2 X を可算集合とするとき，$P(X)$ は ccc を満たすが，$P(X)$ の連鎖 C で $|C|=2^{\aleph_0}$ となるものがある．

7.3.3 (X,d) を距離空間とする．$B=RO(X)$ として，$\kappa=c(B)\geqslant\aleph_0$ とする．すべての $b\in B\setminus\{0\}$ に対し，$B\upharpoonright b$ の分割 P で $|P|=\kappa$ となるものが存在するとき，B の分割 P_n，$n\in N$ で演習問題 7.1.3 の条件を満たすものが存在する．したがって，$RO(X)\cong RO(\kappa^\omega)$ が成り立つ．

7.3.4 完備ブール代数 H は，一様な因子の直積であるとする．このとき，H の直積分解 $H\cong\prod_{i\in I}H_i^{\kappa(i)}$ で，

H_i は一様，

$(\kappa(i)=1)$ または，(H_i の任意の分割 P に対し，$\kappa(i)>|P|$)，

$i\neq j$ なら H_i と H_j は完全に異なる，

ようなものが存在する．更に，$|I|$ および H_i と $\kappa(i)$ は，I 上の置換を除いて一意に決まる．

第8章　バルツァー・フラネックの定理

8.1　定理の応用と証明の概略

命題 4.3.6 により，すべての無限基数 κ に対し，$P(\kappa)$ は濃度 $\lambda=2^{\kappa}$ の自由な部分ブール代数を持ち，したがって，$P(\kappa)$ は 2^{λ} 個の超フィルターを持つことがいえた．次の定理は，このことの一般化となっている：

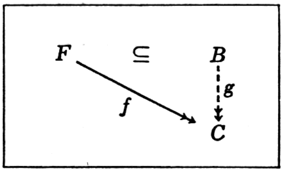
8.1.1 定理（バルツァー・フラネック）　B を完備な無限ブール代数とするとき，B の自由な部分ブール代数 F で $|F|=|B|$ となるものが存在する．

8.1.2 系　任意の完備な無限ブール代数 B に対し，B の双対空間は濃度 $2^{|B|}$ を持つ．

証明　$|St(B)|\leqslant 2^{|B|}$ は明らかだが，定理 8.1.1 と補題 4.3.5 により $2^{|B|}\leqslant|St(B)|$ である．　▮

8.1.3 系　B と C を完備ブール代数で $|B|\geqslant|C|$ を満たすものとするとき，B から C への上射が存在する．

証明　B が有限なら C も有限となり，主張は，自明である．$|B|=\kappa\geqslant\omega$ として，定理 8.1.1 により，F を B の自由な部分ブール代数で，$|F|=\kappa$ となるものとする．このとき，系 4.3.4 により，F から C への上射 f が存在する．C が完備であることから，シコルスキーの拡張定理（定理 3.2.3）により，f を



B から C への上射 g に拡張することができる. ∎

定理 8.1.1 の証明のための準備をいくつかしておこう. B が濃度 $|B|$ の自由な部分ブール代数を持つのは, B が濃度 $|B|$ の独立な部分集合 U を持つときであるのは明らかである. 以下では, B の分割というときには, B の部分集合 P で, $\sum P=1$, $0\notin P$, かつ, すべての異なる $p, p'\in P$ に対し $p\cdot p'=0$ を満たすもののこととする. 分割 P は $|P|\geqq\lambda$ を満たすとき, **λ-分割**と呼ばれる. $Part(B)$ を, B の分割の全体の集合とする. 分割の集合 $\mathscr{P}\subseteq Part(B)$ は,

$n\in \boldsymbol{N}$ と互いに異なる $P_1, \cdots, P_n\in\mathscr{P}$ に対し,

$p_1\in P_1, \cdots, p_n\in P_n$ なら, $p_1\cdot\cdots\cdot p_n>0$

が常に成り立つとき, **独立**であるという. 独立な 2-分割の集合 $\mathscr{P}$ が与えられたとき, これから B の独立な部分集合 U で $|\mathscr{P}|=|U|$ を満たすものが得られる: 各 $P\in\mathscr{P}$ に対し, u_P を P の1つの元として, $U=\{u_P \mid P\in\mathscr{P}\}$ とすればよい. 逆に, すべての B の独立な部分集合 U から, $u\in U$ に対し, $P_u=\{u, -u\}$ として, $\mathscr{P}=\{P_u \mid u\in U\}$ とすることにより, $|\mathscr{P}|=|U|$ を満たす独立な B の 2-分割の集合が得られる. したがって, 定理 8.1.1 の証明のためには, 次の定理 8.1.1′ が証明できれば十分である:

8.1.1′ 定理 B を完備な無限ブール代数とするとき, 独立な B の 2-分割の集合 $\mathscr{P}$ で $|\mathscr{P}|=|B|$ を満たすものが存在する.

8.2 では, まず, 補題 8.2.2 で, $B\cong\prod_{i\in I}B_i$ として, 各 B_i に対し定理 8.1.1′ が成り立つなら, B に対しても定理 8.1.1′ が成り立つことが示される. さて, b を B の原子元の全体の上限とすると, $B\cong B\restriction b\times B\restriction -b$ だが, $B\restriction -b$ は無原子的で, $B\restriction b$ は $\lambda=|At(B)|$ として $P(\lambda)$ と同型になる. $\lambda<|B|$ なら, $|B|=|B\restriction -b|$ となるから, $B\restriction -b$ に対し, 定理 8.1.1′ が示せれば, B に対しても定理 8.1.1′ が成り立つことがいえる. 一方, $\lambda=|B|$ なら, $P(\lambda)$ に関する定理 8.1.1′ である補題 8.2.4 により, B に対する定理 8.1.1′ が示される. 以上により, 定理 8.1.1′ の証明は, B が無原子的な場合に還元された. 次に, φ_1 と φ_2 を以下のような単調基数関数 (7.1 を参照) とする:

$$\varphi_1(C)=\mathrm{sat}\,(C)=\sup\,\{|P|^+ \mid P\in Part\,(C)\}$$

$\varphi_2(C)=\pi(C)=\min\ \{|D| \mid D$ は C の稠密な部分集合$\}$

このとき，補題 8.2.2 と補題 7.1.2 により，*sat* と π に関して一様な B に対し，定理 8.1.1′ が示せれば十分であることが分かる．次のことに注意しよう：$c(B)=\tau$ が実現されるとき，*sat* $(B)=\tau^+$ となる．そうでないときには，*sat* $(B)=\tau=c(B)$ で，τ は弱い意味で到達不可能となる——定理 7.3.4 の後の注意を参照せよ．定理 8.1.1′ は，*sat* $(B)=\tau^+$ となる場合には，補題 8.2.6 で，*sat* (B) が弱い意味で到達不可能となる場合には，補題 8.2.9 で証明される．

8.2 バルツァー・フラネックの定理の証明

ここでは，8.1 で述べた証明の概略に沿って，必要となる補助定理を証明する．定理 8.1.1′ は，最終的には，補題 8.2.6 と補題 8.2.9 から証明される．

$(X_i)_{i\in I}$ を集合の族とする．$F\subseteq\prod_{i\in I}X_i$ は，任意の有限個の $f_1, \cdots, f_n\in F$ に対し，$i\in I$ で $f_1(i), \cdots, f_n(i)$ がそれぞれ異なるようなものがあるとき，**有限で異なる**という．

8.2.1 補題 各 $i\in I$ に対し，X_i が無限集合なら，$\prod_{i\in I}X_i$ の有限で異なる部分集合 F で $|F|=|\prod_{i\in I}X_i|$ となるものがある．

証明 $<$ を I 上の整列順序で，I の元 $i<j$ に対し，$|X_i|\leqslant|X_j|$ の成り立つようなものとして，γ を I の $<$ に関する順序型とする．このとき，一般性を失うことなく $I=\gamma$ と考えてよい．γ に関する帰納法により，補題の主張を証明しよう．

場合 1 $\gamma=0$ または $\gamma=1$ のとき：明らかである．

場合 2 $\alpha, \delta<\gamma$ があって，γ が順序数の和により，$\gamma=\alpha+\delta$ となるとき：このときには，$\prod_{i\in\gamma}X_i=\prod_{i<\alpha}X_i\times\prod_{\alpha\leqslant i<\gamma}X_i$ となることに注意しよう．ここに，右辺の2番目の部分積の係数の集合は，順序型 $\delta<\gamma$ を持つものとする．$\lambda=|\prod_{i\in\gamma}X_i|=\max(|\prod_{i\in\alpha}X_i|, |\prod_{\alpha\leqslant i<\gamma}X_i|)$ となるが，たとえば，$\lambda=|\prod_{\alpha\leqslant i<\gamma}X_i|$ として，帰納法の仮定から，有限で異なる $G\subseteq\prod_{\alpha\leqslant i<\gamma}X_i$ で $|G|=\lambda$ となるものがあるが，任意の $h\in\prod_{i\in\alpha}X_i$ をとって，$F=\{h\cup g \mid g\in G\}$ と置けばよい．

場合 3 $\gamma>1$ で，任意の分解 $\gamma=\alpha+\delta$ に対し，$\delta=\gamma$ となるとき：このときには，$\kappa=|\gamma|$ は無限で，γ は極限数である．$E=\{e\subseteq\gamma \mid e$ は有限だが空で

ない）として，1対1写像 $\varphi: E \Vdash\!\!\to \gamma$ で，すべての $e \in E$ と $i \in e$ に対して，$i \leqslant \varphi(e)$ となるものを帰納的に構成する．$|E| = \kappa$ で，γ の任意の元から先の部分は，γ と同型，したがって濃度 κ を持つから，上のような φ の構成は，実際に可能である．$|\prod_{i \in e} X_i| = |X_{\max(e)}| \leqslant |X_{\varphi(e)}|$ だから，1対1写像 $\phi_e : \prod_{i \in e} X_i \Vdash\!\!\to X_{\varphi(e)}$ が存在する．さて，$\tau : \prod_{i \in \gamma} X_i \to \prod_{i \in \gamma} X_i$ を，$g \in \prod_{i \in \gamma} X_i$ に対し，$j \in J = \{\varphi(e) \mid e \in E\}$，たとえば，$j = \varphi(e)$ なら，$\tau(g)(j) = \phi_e(g \restriction e)$ となるように定義する．

$F = \{\tau(g) \mid g \in \prod_{i \in \gamma} X_i\}$ と置く．このとき，τ は1対1写像となり，F は有限で異なる：$g_1, \cdots, g_n \in \prod_{i \in \gamma} X_i$ が互いに異なるとき，$e \in E$ で $g_1 \restriction e, \cdots, g_n \restriction e$ が互いに異なるようなものをとり，$j = \varphi(e)$ と置くと，$1 \leqslant k < l \leqslant n$ に対し，$\tau(g_k)(j) \neq \tau(g_l)(j)$ となるからである．　▮

以下では，互いに素な元の和を $\dot{\sum}$，$\dot{+}$ で表わすことにする．

8.2.2 補題　$i \in I$ に対し，B_i を完備ブール代数として，$\mathscr{P}_i \subseteq Part(B_i)$ を B_i の λ-分割の独立な族で $|\mathscr{P}_i| \geqslant \omega$ となるものとする．このとき，$\prod_{i \in I} B_i$ の λ-分割の独立な族 $\mathscr{Q}$ で $|\mathscr{Q}| = |\prod_{i \in I} \mathscr{P}_i|$ となるものがある．特に，定理 8.1.1′ の主張が各 B_i に対し成り立つなら，$\prod_{i \in I} B_i$ に対しても成り立つ．

証明　一般性を失うことなく，$B_i = B \restriction b_i$ で $(b_i)_{i \in I}$ は B の分割であるとしてよい．また，B_i が完備であることから，分割 $P \in \mathscr{P}_i$ を粗くして，$|P| = \lambda$ が各 $P \in \mathscr{P}_i$ について成り立つと仮定してよい．$P \in \mathscr{P}_i$ に対し，$P = \{a_{P\alpha} \mid \alpha < \lambda\}$ とする．補題 8.2.1 により，有限で異なる $F \subseteq \prod_{i \in I} \mathscr{P}_i$ で $|F| = |\prod_{i \in I} \mathscr{P}_i|$ となるものがある．$f \in F$ と $i \in I$ に対し，$f(i) \in \mathscr{P}_i$ であるが，$Q_f = \{\dot{\sum}_{i \in I} a_{f(i)\alpha} \mid \alpha < \lambda\}$ として，$\mathscr{Q} = \{Q_f \mid f \in F\}$ と置く．$1 = \dot{\sum}_{i \in I} b_i = \dot{\sum}_{i \in I} \dot{\sum}_{\alpha < \lambda} a_{f(i)\alpha} = \dot{\sum}_{\alpha < \lambda} \dot{\sum}_{i \in I} a_{f(i)\alpha} = \dot{\sum}_{\alpha < \lambda} Q_f$ だから，各 Q_f は，B の λ-分割となる．

$\mathscr{Q}$ は，独立である：$f^1, \cdots, f^n$ を F の異なる元として，$\alpha^1, \cdots, \alpha^n < \lambda$ のとき，$\sum_{i \in I} a_{f^1(i)\alpha^1} \cdot \cdots \cdot \sum_{i \in I} a_{f^n(i)\alpha^n} > 0$ となることが示せればよい．F は，有限で異なるから，$j \in I$ で $f^1(j), \cdots, f^n(j)$ がそれぞれ異なるようなものがある．ところが，$f^1(j), \cdots, f^n(j)$ は $B \restriction b_j$ の独立な分割だったから，$a_{f^1(j)\alpha^1} \cdot \cdots \cdot a_{f^n(j)\alpha^n} > 0$ が成り立っている．　▮

8.2.3 補題 B を完備ブール代数として，$\mathscr{P}\cup\{Q\}$ を λ-分割の独立な集合で $|\mathscr{P}|\geqq\omega$ となるものとする．このとき，B の λ-分割の独立な集合 $\mathscr{Q}$ で $|\mathscr{Q}|=|\mathscr{P}|^{|Q|}$ となるものがある．

証明 $Q=\{b_i \mid i\in I\}$ とする．$i\in I$ と $P\in\mathscr{P}$ に対し，$Q_{iP}=\{p\cdot b_i|p\in P\}$ は，P と Q が独立であることから，$B\restriction b_i$ の λ-分割となる．$\mathscr{P}\cup\{Q\}$ は独立だから，$\mathscr{Q}_i=\{Q_{iP}|P\in\mathscr{P}\}$ は，$B\restriction b_i$ の λ-分割の独立な集合となり，$|\mathscr{Q}_i|=|\mathscr{P}|\geqq\omega$ である．したがって，補題 8.2.2 により，独立な $\mathscr{Q}\subseteq Part(B)$ で $|\mathscr{Q}|=|\mathscr{P}|^{|I|}=|\mathscr{P}|^{|Q|}$ となるものがあることが分かる． ∎

8.2.4 補題 $\lambda\geqq\omega$ とする．$P(\lambda)$ の λ-分割の独立な集合 $\mathscr{Q}$ で $|\mathscr{Q}|=2^\lambda=|P(\lambda)|$ となるものがある．

証明 $P(\lambda)$ の λ-分割の独立な集合 $\mathscr{P}'$ で $|\mathscr{P}'|=\omega$ となるものが構成できれば十分である．このような $\mathscr{P}'$ が存在すれば，$Q\in\mathscr{P}$ をとって $\mathscr{P}=\mathscr{P}'\setminus\{Q\}$ とすれば，補題 8.2.3 により，$|\mathscr{Q}|=|\mathscr{P}|^{|Q|}=\omega^\lambda=2^\lambda$ となる $\mathscr{Q}$ が得られるからである．集合

$$X=\{x\in\lambda^\omega|\ \text{ほとんどすべての}\ n\ \text{に対し}\ x(n)=0\}$$

は濃度 λ を持つ．このとき，$|\mathscr{P}'|=\omega$ となる $P(X)$ の λ-分割の独立な集合が以下のようにして得られる：

$$\mathscr{P}'=\{P_n|n\in\omega\},$$
$$P_n=\{p_{n\alpha}|\alpha<\lambda\},$$
$$p_{n\alpha}=\{x\in X|x(n)=\alpha\}.$$
∎

以下では，$P\in Part(B)$ に対し，$P^\Sigma=\{\sum M|M\subseteq P\}$ とする．P^Σ は，B の P により完備に生成された部分ブール代数で，P 上の巾集合代数と同型になる．

$\mathscr{P}\subseteq Part(B)$ に対し，$\mathscr{P}^{\Sigma\Pi}=\{\prod_{P\in\mathscr{P}}f(P)|f:\mathscr{P}\to B,\ P\in\mathscr{P}\ \text{に対し}\ f(P)\in P^\Sigma\}$ とする．各 $P\in\mathscr{P}$ に対し，P^Σ は有限個の元の上限をとる操作に関して閉じているから，$\mathscr{P}^{\Sigma\Pi}$ もこの操作に関し閉じている．

8.2.5 補題（ヴラディミロフ・モンク） B を完備とする．$\mathscr{P}\subseteq Part(B)$ として，どの $p\subseteq\bigcup\mathscr{P}$ に対しても，$\mathscr{P}^{\Sigma\Pi}\cap B\restriction p$ は $B\restriction p$ で稠密でないとす

る．このとき，B の分割 $Q=\{u, v\}$ で，すべての $p\in\bigcup\mathscr{P}$ に対し，$p\cdot u>0$ および $p\cdot v>0$ の成り立つようなものがある．

証明 各 $p\in\bigcup\mathscr{P}$ に対し，B の元 x_p, y_p で，$0<x_p\leqslant y_p\leqslant p$ となるものを次のようにして選ぶ：補題の仮定から，$0<x_p<p$ で $0<b\leqslant x_p$ となるような $b\in\mathscr{P}^{\Sigma\Pi}$ の存在しないものがある．このような x_p に対し，$y_p=\prod_{P\in\mathscr{P}}\sum\{q\in P \mid q\cdot x_p>0\}$ と定義する．$y_p\in\mathscr{P}^{\Sigma\Pi}$ であることに注意しよう．各 $P\in\mathscr{P}$ は B の分割だから，$x_p\leqslant\sum\{q\in P \mid q\cdot x_p>0\}$ となり，したがって，$x_p\leqslant y_p$ である．$p\in P\in\mathscr{P}$ とすると，$0<x_p\leqslant p$ だから，p は，$x_p\cdot q>0$ となるただ1つの P の元 q となる．したがって，$\sum\{q\in P \mid q\cdot x_p>0\}=p$ となり，これから $y_p\leqslant p$ がいえる．

ツォルンの補題により，$T\subseteq\bigcup\mathscr{P}$ を $\{y_t \mid t\in T\}$ が互いに素であるという性質に関し極大になるようにとり，$u=\sum_{t\in T}x_t$，$v=-u$ と置く．y_t は互いに素だから，各 $t\in T$ に対し，$y_t\cdot u=x_t$ が成り立つ．$P\in\mathscr{P}$ に対し $p\in P$ として，$p\cdot u>0$ および $p\cdot v>0$ が成り立つことを示そう．T の定義から，$t\in T$ で $y_p\cdot y_t>0$ となるものがある．$p\cdot u=0$ だったとすれば，$p\cdot x_t=0$ となり，y_t の定義から，$p\cdot y_t=0$ である．したがって，$y_p\leqslant p$ から，$y_p\cdot y_t=0$ となるが，これは t の選び方に矛盾する．$p\cdot v>0$ は次のようにして示せる：上のような $t\in T$ に対し $0<y_p\cdot y_t\in\mathscr{P}^{\Sigma\Pi}$ であるから，x_t の選び方により，$y_p\cdot y_t\not\leqslant x_t$ となり，$y_p\cdot(y_t\cdot -x_t)>0$ である．$y_t\cdot u=x_t$ だったから，$y_t\cdot -x_t\leqslant -u$ となるが，このことと，$y_p\leqslant p$ により，$0<y_p\cdot(y_t\cdot -x_t)\leqslant p\cdot -u=p\cdot v$ となる． ∎

8.2.6 補題 B を完備で sat と π に関し一様であるとする．また $\mathrm{sat}(B)=\kappa^+$ で $\kappa\geqslant\omega$ とする．このとき，B の 2-分割の独立な集合 $\mathscr{Q}$ で $|\mathscr{Q}|=|B|$ となるものが存在する．

証明 $\pi(B)=\delta$ とする．まず，$|B|=\delta^\kappa$ となることを示す：$D\subseteq B$ を稠密で $|D|=\delta$ を満たすものとする．B は D から完備に生成されるから，補題 7.3.3 により，$|B|\leqslant\delta^\kappa$ が成り立つ．逆に，B の分割 P で $|P|=\kappa$ となるものをとると，$p\in P$ に対して $\delta=\pi(B\upharpoonright p)\leqslant|B\upharpoonright p|$ となるから，$B\cong\prod_{p\in P}B\upharpoonright p$ により，$|B|\geqslant\delta^\kappa$ を得る．

μ を，すべての $\tau<\mu$ に対し，$\tau^{\kappa}<\delta^{\kappa}$ で，$\mu^{\kappa}=\delta^{\kappa}$ となる基数とする．$\mu\leqslant\delta$ である．$\mu\leqslant 2^{\kappa}$ なら，$\delta^{\kappa}=\mu^{\kappa}\leqslant 2^{\kappa}\leqslant\delta^{\kappa}$ により，$2^{\kappa}=\delta^{\kappa}$ となり，$\mu=2$ がいえる．したがって，$\mu>2^{\kappa}$ あるいは $\mu=2$ のいずれかが成り立つ．また，$\delta\leqslant\tau^{\kappa}$ なら $\delta^{\kappa}\leqslant\tau^{\kappa}$，したがって，$\tau\geqslant\mu$ となるから，$\tau<\mu$ なら $\tau^{\kappa}<\delta$ が成り立つ．

場合 1 $\mu=2$ のとき：このときには，$|B|=\delta^{\kappa}=\mu^{\kappa}=2^{\kappa}$ となる．$sat(B)=\kappa^{+}$ だから，B の分割 P で $|P|=\kappa$ となるものがある．P から B で完備に生成された部分ブール代数は，$P^{\Sigma}=\{\sum M|M\subseteq P\}$ となるから，$P(\kappa)$ と同型である．ゆえに，補題 8.2.4 により，この部分ブール代数は，（したがって，B も）濃度 2^{κ} の 2-分割の独立な集合を持つ．

場合 2 $\mu>2^{\kappa}$ のとき：このときには，次に示すように，$Part(B)$ の独立な部分集合 $\{Q\}\cup\mathscr{P}$ で，$|Q|=\kappa$，$|\mathscr{P}|=\mu$，かつ，すべての $P\in\mathscr{P}$ に対し $|P|\geq 2$ となるものが帰納的に定義できる．したがって，補題 8.2.3 により，独立な $\mathscr{Q}\subseteq Part(B)$ で $|\mathscr{Q}|=\mu^{\kappa}=\delta^{\kappa}=|B|$ となるものが存在する．

$sat(B)=\kappa^{+}$ により，$Q\in Part(B)$ で $|Q|=\kappa$ となるものが存在する．したがって，すべての $\mathscr{R}\subseteq Part(B)$ で $|\mathscr{R}|<\mu$ となるものに対し，$\mathscr{R}\cup\{\{u,-u\}\}$ が独立となるような $u\in B$ が存在することをいえば，これにより，$\mathscr{P}$ を帰納的に構成できるが，このことは，以下のようにして示せる：J を，B の分割 F で $\mathscr{R}$ の有限個の元の共通細分となるものの全体の集合とする．つまり，J のすべての元 F は，ある有限個の互いに異なる $R_1,\cdots,R_n\in\mathscr{R}$ に対し，$F=\{r_1\cdot\cdots\cdot r_n\mid r_i\in R_i\}$ という形をしている．$|J|<\mu$ である．$sat(B)=\kappa^{+}$ により，$F\in J$ に対し，$|F|\leqslant\kappa$ となるから $|F^{\Sigma}|\leqslant 2^{\kappa}$ が成り立つ．したがって，$|\bigcup_{F\in J}F^{\Sigma}|\leqslant|J|\cdot 2^{\kappa}<\mu$ である．このことと，$sat(B)=\kappa^{+}$ および補題 7.3.2 により，$|J^{\Sigma\Pi}|\leqslant|\bigcup_{F\in J}F^{\Sigma}|^{\kappa}<\delta$ となる．したがって，B が π-一様であることから，$a\in\bigcup J$ に対し，$J^{\Sigma\Pi}\cap B\restriction a$ は $B\restriction a$ で稠密でない．よって，補題 8.2.5 により，$u\in B$ で，すべての $a\in\bigcup J$ に対し，$a\cdot u>0$ および $a\cdot -u>0$ の成り立つようなものがある．このとき，J の定義により，$\mathscr{R}\cup\{\{u,-u\}\}$ は独立になる．∎

8.2.7 補題（バルツァー・ボイタシュ） $\nu\geqslant\omega$ として，$(a)_{\alpha<\nu}$ をブール代数 B の 0 と異なる元の列とする．また，すべての $b\in B\setminus\{0\}$ に対し，sat

$(B\restriction b)>\nu^+$ とする．このとき，B の元の列 $(b_\alpha)_{\alpha<\nu}$ で，すべての $\alpha<\beta<\nu$ に対し，$0<b_\alpha\leqslant a_\alpha$，かつ $b_\alpha\cdot b_\beta=0$ を満たすようなものが存在する．

証明　D が $B\setminus\{0\}$ の互いに素な部分集合で，$u\in B$ のとき，$D(u)=\{d\in D|d\cdot u>0\}$ と定義する．互いに素な D で，$|D(a_\alpha)|\geqslant\nu$ がすべての $\alpha<\nu$ に対し成り立つようなものが構成できればよい．このような D に対し，帰納的に $d_\alpha\in D(a_\alpha)$ を互いに異なるようにとって，$b_\alpha=d_\alpha\cdot a_\alpha$ とすればよいからである．実際，$|D(a_\alpha)|\geqslant\nu$ なら，常に，$d_\alpha\in D(a_\alpha)\setminus\{d_\beta\mid\beta<\alpha\}$ ととることができる．

このためには，D_α と $V_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}D_\beta$ を，次の性質を持つようにとり，$D=\bigcup_{\alpha<\nu}D_\alpha$ として，D を定義すればよい：

$D_\alpha\subseteq B\setminus\{0\}$ で，D_α は互いに素，

$\beta<\alpha<\nu$ なら，$D_\beta\subseteq D_\alpha$，

$\beta<\gamma<\nu$ に対し，$V_\beta(a_\gamma)=\varnothing$，または，$|V_\beta(a_\gamma)|\geqq\nu^+$，

$|D_\beta(a_\beta)|\geqq\nu$.

すべての $\beta<\alpha$ に対し D_β が上の性質を持つように定義されたとして，$|V_\alpha(a_\alpha)|\geqq\nu^+$ なら，$D_\alpha=V_\alpha$ とすればよい．そうでなければ，$V_\alpha(a_\alpha)=\varnothing$ だが，$sat\,(B\restriction a_\alpha)>\nu^+$ により，$B\restriction a_\alpha\setminus\{0\}$ の互いに素な部分集合 Q で $|Q|=\nu^+$ となるものがあるから，

$$D_\alpha=(V_\alpha\cup Q)\setminus\bigcup\{Q(a_\gamma)\mid\alpha<\gamma\ \text{で}\ |Q(a_\gamma)|\leqslant\nu\}$$

とすればよい．　∎

8.2.8 補題　B を完備で，sat に関し一様とし，$\kappa=sat\,(B)$ が弱い意味で到達不可能であるとする．このとき，独立な $\mathscr{P}\subseteq Part\,(B)$ で，$|\mathscr{P}|=\kappa$，$\sup_{P\in\mathscr{P}}|P|=\kappa$ となるものが存在する．

証明　$\mathscr{R}\subseteq Part\,(B)$ を独立で $|\mathscr{R}|<\kappa$ となるものとし，$\tau<\kappa$ とするとき，$P\in Part\,(B)$ で $|P|\geqslant\tau$ かつ $\mathscr{R}\cup\{P\}$ が独立となるようなものがあることを示す．このことにより，$\mathscr{P}$ を帰納的に構成することができる．

T を B の部分集合で $\bigcup\mathscr{R}$ を含み，有限の積に関して，閉じているもののうち最小なものとする．$|\mathscr{R}|<\kappa=sat\,(B)$ で，κ は弱い意味で到達不可能だから，T の濃度 ν は，κ より真に小さい．$T\setminus\{0\}=\{a_\alpha\mid\alpha<\nu\}$ とする．$\nu^+<\kappa$

だから，補題 8.2.7 により，互いに素な B の元の族 $(b_\alpha)_{\alpha<\nu}$ で，$0<b_\alpha\leqslant a_\alpha$ となるものがある．$sat(B\upharpoonright b_\alpha)=\kappa>\tau$ により，$\alpha<\nu$，$\beta<\tau$ に対し，B の元 $c_{\alpha\beta}$ で，$0<c_{\alpha\beta}$，$\dot{\sum}_{\beta<\tau}c_{\alpha\beta}=b_\alpha$ となるものがある．このとき，$0<\beta$ に対し，$x_\beta=\dot{\sum}_{\alpha<\nu}c_{\alpha\beta}$，$x_0=-\dot{\sum}_{\alpha<\nu}b_\alpha\dot{+}\dot{\sum}_{\alpha<\nu}c_{\alpha 0}$ として，$P=\{x_\beta|\beta<\tau\}$ と定義する．$P\in Part(B)$ で $|P|=\tau$ となることは明らかである．更に，$\mathscr{R}\cup\{P\}$ は独立である：$R_1,\cdots,R_n$ を $\mathscr{R}$ の異なる元として，$r_i\in R_i$，$\beta<\tau$ とする．$\mathscr{R}$ が独立であることから，$t=r_1\cdot\cdots\cdot r_n$ は $T\backslash\{0\}$ の元となるから，たとえば，$t=a_\alpha$ とする．このとき，$0<c_{\alpha\beta}\leqslant b_\alpha\cdot x_\beta\leqslant a_\alpha\cdot x_\beta=t\cdot x_\beta$ となる． ∎

8.2.9 補題 B を完備で，sat と π に関し一様とし，$sat(B)$ は弱い意味で到達不可能とする．このとき，2-分割の独立な集合 $\mathscr{P}\subseteq Part(B)$ で $|\mathscr{P}|=|B|$ となるものが存在する．

証明 補題 8.2.6 の証明でと同じように，$\pi(B)=\delta$，$sat(B)=\kappa$ とすると，$|B|=\delta^{<\kappa}$ となる．μ を，$\mu^{<\kappa}=\delta^{<\kappa}$ だが，すべての $\tau<\mu$ に対し，$\tau^{<\kappa}<\delta^{<\kappa}$ となるような基数とする．このとき，前と同じように，$\mu=2$ または $2^{<\kappa}<\mu$ が成り立ち，$\tau<\mu$ に対し，$\tau^{<\kappa}<\delta$ となる．

場合 1 $\mu=2$ のとき：補題 8.2.8 により，$\{P_\alpha \mid \alpha<\kappa\}$ を B の分割の独立な集合で，$\kappa_\alpha=|P_\alpha|$ として，$\sup_{\alpha<\kappa}\kappa_\alpha=\kappa$ となるようなものとする．$\alpha<\kappa$ に対し，P_α によって完備に生成された B の部分ブール代数 B_α は，$P(\kappa_\alpha)$ と同型になる（P_α の元が B_α の原子元となる）．$(P_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ は独立だから，$(B_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ は，7.2 での意味で独立である．補題 8.2.4 により，$\alpha<\kappa$ に対し，独立な $\mathscr{P}_\alpha\subseteq Part(B_\alpha)$ で，$|\mathscr{P}_\alpha|=2^{\kappa_\alpha}$ となるものがある．$\mathscr{P}_\alpha$ の元は，すべて 2-分割であるとしてよい．$(B_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ が独立であることから，$\mathscr{P}=\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathscr{P}_\alpha$ も独立であるが，$|\mathscr{P}|=\sup_{\alpha<\kappa}2^{\kappa_\alpha}=2^{<\kappa}=\delta^{<\kappa}=|B|$ が成り立つ．

場合 2 $\mu>2^{<\kappa}$ のとき：$\{P_\alpha \mid \alpha<\kappa\}$ を，場合 1 でと同じようにとり，$\kappa_\alpha=|P_\alpha|$ とする．$\kappa\leqslant 2^{<\kappa}<\mu$ により，補題 8.2.6 の場合 2 での証明と同様に，$\{P_\alpha \mid \alpha<\kappa\}$ を拡張して，独立な分割の集合 $\{P_\alpha \mid \alpha<\kappa\}\cup\mathscr{Q}$ で，$\mathscr{Q}$ が濃度 μ の 2-分割の集合となっているようなものが構成できる．$\mathscr{Q}$ を互いに素な部分集合 $\mathscr{Q}_\alpha$，$\alpha<\kappa$ に分割して，$|\mathscr{Q}_\alpha|=\mu$ となるようにする．

このとき，各 $\alpha<\kappa$ に対し，$\{P_\alpha\}\cup\mathscr{Q}_\alpha$ から出発して，独立な $\mathscr{P}_\alpha'$ で，$|\mathscr{P}_\alpha'|=|\mathscr{Q}_\alpha|^{|P_\alpha|}=\mu^{\kappa_\alpha}$ となるものが以下のように構成できる：B_α を $P_\alpha\cup\bigcup\mathscr{Q}_\alpha$ から生成された B の部分ブール代数として，C_α をその完備化とする (2.4を参照)．C_α での補題 8.2.3 により，P_α と $\mathscr{Q}_\alpha$ から，独立な $\mathscr{P}_\alpha\subseteq Part(C_\alpha)$ で，$|\mathscr{P}_\alpha|=\mu^{\kappa_\alpha}$ となるものがとれる．定理 3.2.3 の後の注意により，C_α を B の部分ブール代数と考えてよいが，C_α から B への埋込みは完備であるとは限らない．したがって，$P\in\mathscr{P}_\alpha$ は，一般には，B の分割にならないが，各 $P\in\mathscr{P}_\alpha$ に対し，$P'\in Part(B)$ で各 $p\in P$ に対し $p\leqslant p'$ となる $p'\in P'$ の存在するようなものがあるから，このようなものの全体を，$\mathscr{P}_\alpha'$ としてとればよい．$\{P_\alpha \mid \alpha<\kappa\}\cup\mathscr{Q}$ が独立であることから，$(B_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ は B の独立な部分ブール代数の族となり，B_α が C_α で稠密であることから，$(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ も B の独立な部分ブール代数となる．したがって，$\mathscr{P}=\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathscr{P}_\alpha'$ が B で独立となることが分かるが，$|\mathscr{P}|=\sum_{\alpha<\kappa}\mu^{\kappa_\alpha}=\mu^{<\kappa}=\delta^{<\kappa}=|B|$ である． ∎

第9章　測度ブール代数

測度論では，ブール代数，より正確には σ-集合ブール代数 B で，加法的，あるいは σ-加法的測度

$$\mu : B \to [0, 1]$$

を持つものが考察される．ここでは，9.1 で測度ブール代数の一般的な性質を調べた後，9.2 で有限加法的測度ブール代数の完備化の方法について考察する．特に，この方法により，任意の無限基数 κ に対し，標準測度ブール代数 (M_κ, ν) が構成できる．9.3 は，すべての測度ブール代数は，可算個の標準ブール代数の直積であるという，D. マハラムの非常に重要な定理を含んでいる．9.4 では，測度ブール代数の応用として，ソロヴェイの完備ブール代数の構造定理の証明を与える．

9.1　ブール代数上の測度に関する一般論

ブール代数 B から実数の単位区間への写像

$$\mu : B \to [0, 1]$$

は，

$$\mu(1_B) = 1$$

かつ，$x \cdot y = 0$ となるすべての $x, y \in B$ に対し，

$$\mu(x + y) = \mu(x) + \mu(y)$$

を満たすとき，**有限加法的測度**と呼ばれる．このとき，有限個の互いに素な B の元 $x_1, \cdots, x_n$ に対し，

$$(1)\quad \mu(x_1 \dot{+} \cdots \dot{+} x_n) = \mu(x_1) + \cdots + \mu(x_n)$$

が成り立つ．$0_B \cdot 0_B = 0_B$ により，$\mu(0_B)=\mu(0_B+0_B)=\mu(0_B)+\mu(0_B)$ だから，$\mu(0_B)=0_B$ となる．更に，B の元の互いに素な可算列 $(x_n)_{n\in N}$ で $\sum_{n\in \boldsymbol{N}}^B x_n$ の存在するものに対し，常に

$$(2)\quad \mu\Bigl(\sum_{n\in \boldsymbol{N}}^B x_n\Bigr)=\sum_{n\in \boldsymbol{N}}\mu(x_n)$$

が成り立つとき，μ は **σ-加法的**であるという．(2) を満たす有限加法的測度は**測度**と呼ばれる．有限加法的測度 μ は，すべての $x\in B\setminus\{0\}$ に対し，$\mu(x)>0$ となるとき，**真に正**であるという．

例 9.1.1　B を任意のブール代数として，p を B 上の超フィルターとする．

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & x\in p \text{ のとき}\\ 0 & x\notin p \text{ のとき}\end{cases}$$

とすれば，この μ は有限加法的だが，一般には，σ-加法的でも，真に正でもない．　▮

例 9.1.2　$B=P(\boldsymbol{N})$ として，各 $n\in\boldsymbol{N}$ に対し，$w_n\in[0,1]$ を $\sum_{n\in\boldsymbol{N}} w_n=1$ となるようにとる．このとき，$a\subseteq\boldsymbol{N}$ に対し，

$$\mu(a)=\sum_{n\in a} w_n$$

とすれば，μ は $P(\boldsymbol{N})$ 上の測度となる．μ が真に正になるのは，すべての w_n が 0 と異なるときである．　▮

例 9.1.3　B を $[0,1]$ のボレル集合の全体の作る σ-ブール代数として，μ を B 上のルベーグ測度とする．μ は B 上の測度となるが，真に正ではない．　▮

9.1.1 補題　μ を B 上の有限加法的測度とし，$x, y\in B$ とする．このとき，

a) $x\leqslant y$ なら，$\mu(x)\leqslant\mu(y)$ となり，$\mu(y\cdot -x)=\mu(y)-\mu(x)$ である．特に，$\mu(-x)=1-\mu(x)$ である．

b) $\mu(x+y)\leqslant\mu(x)+\mu(y)$ が成り立つ．

μ を σ-加法的として，$n\in\boldsymbol{N}$ に対し $x_n\in B$ とする．このとき，

c) $\sum_{n\in\boldsymbol{N}} x_n$ が存在するなら，$\mu(\sum_{n\in\boldsymbol{N}} x_n)\leqslant\sum_{n\in\boldsymbol{N}}\mu(x_n)$ となる．

d) $x_0\leqslant x_1\leqslant x_2\cdots$ で，$\sum_{n\in\boldsymbol{N}} x_n$ が存在するなら，$\mu(\sum_{n\in\boldsymbol{N}} x_n)=\sup_{n\in\boldsymbol{N}}\mu(x_n)$ となる．

e）$x_0 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \cdots$ で，$\prod_{n\in \boldsymbol{N}} x_n$ が存在するなら，$\mu(\prod_{n\in \boldsymbol{N}} x_n)=\inf_{n\in \boldsymbol{N}} \mu(x_n)$ となる．

証明　a）：$y=x\dot{+}y\cdot -x$ だから，$\mu(y)=\mu(x)+\mu(y\cdot -x)$ である．b）：$x+y=x\dot{+}(y\cdot -x)$ だから，$\mu(x+y)=\mu(x)+\mu(y\cdot -x)\leqslant \mu(x)+\mu(y)$ となる．c）：b）と同様である．d）：一般性を失うことなく $x_0=0$ としてよい．$n\in \boldsymbol{N}$ に対し，$d_n=x_{n+1}-x_n$ とすれば，$\sum_{n\in \boldsymbol{N}} x_n=\dot{\sum_{n\in \boldsymbol{N}}} d_n$ で，$x_{n+1}=d_0+\cdots+d_{n+1}$ となるから，

$$
\begin{aligned}
\mu(\sum_{n\in \boldsymbol{N}} x_n) &= \sum_{n\in \boldsymbol{N}} \mu(d_n) \\
&= \sup_{n\in \boldsymbol{N}} (\mu(d_0)+\cdots+\mu(d_n)) \\
&= \sup_{n\in \boldsymbol{N}} \mu(x_n).
\end{aligned}
$$

e）：

$$
\begin{aligned}
\mu(\prod_{n\in \boldsymbol{N}} x_n) &= 1-\mu(-\prod_{n\in \boldsymbol{N}} x_n) \\
&= 1-\sup_{n\in \boldsymbol{N}} \mu(-x_n) && \text{（d）による）} \\
&= 1-\sup_{n\in \boldsymbol{N}} (1-\mu(x_n)) \\
&= \inf_{n\in \boldsymbol{N}} \mu(x_n).
\end{aligned}
$$
▮

ブール代数 B と B 上の真に正な有限加法的測度の組 (B, μ) は**有限加法的測度ブール代数**と呼ばれる．更に，B が σ-完備で，μ が σ-加法的であるとき，(B, μ) は**測度ブール代数**と呼ばれる．

9.1.2 命題　有限加法的測度ブール代数，特に，測度ブール代数は，ccc を満たす．

証明　D を $B\setminus\{0\}$ の互いに素な部分集合として，$n\in \boldsymbol{N}\setminus\{0\}$ に対し，$D_n=\{d\in D \mid 1/n\leqslant \mu(d)\}$ とする．μ は真に正だから，$D=\bigcup_{n>0} D_n$ となる．各 D_n は，高々 n 個の相異なる元を持つ：$x_1, \cdots, x_{n+1}$ が D_n の異なる元だったとすれば，$\mu(x_1\dot{+}\cdots\dot{+}x_{n+1})=\mu(x_1)+\cdots+\mu(x_n)\geqslant (n+1)/n>1$ となるが，これは矛盾である．したがって，D は可算である．▮

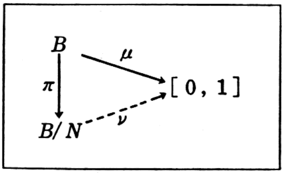
9.1.3 系　すべての測度ブール代数は完備である．

証明　(B, μ) を測度ブール代数とすれば，B は，σ-完備で ccc を満たす．したがって，補題 7.3.2 により，B は完備である．▮

ブール代数が真に正な有限加法的測度を持つための必要十分条件はケーリーによって与えられている．後に，ガイフマンは，この条件が，すべての ccc を満たす B で満たされるとは限らないことを示した．B が完備で，真に正な有限加法的測度を持つときでも，B が真に正な測度を持つとは限らない：F を可算な生成系上の自由ブール代数として，B を F の完備化とする．この節の終りでFが真に正な有限加法的測度を持つことが示される．8.2 での結果から，この有限加法的測度は，B 上に拡張できる．ところが，B は，弱-$(\aleph_0, \aleph_0)$-分配的でないから，演習問題 9.1.2 により，真に正な σ-加法的測度を持たない．——このことの初等的な証明はハルモスの本［9］にある．

次の命題 9.1.4 および以後この章では，3.3 でと同様に B の元 x, y の対称差 $x \triangle y$ を $x \cdot -y + y \cdot -x$ で定義する．

9.1.4 命題 μをB上の有限加法的測度とする．このとき，$N = \{x \in B \mid \mu(x) = 0\}$ は B のイデアルで，μ が σ-加法的で B が σ-完備なら，N は σ-完備となる．また，B/N 上の測度 ν で $\nu \circ \pi = \mu$ となるものが一意に存在して，ν は真に正となり，B が σ-完備で μ が σ-加法的なら，B/N は σ-完備で，ν は σ-加法的になる．つまり，このときには，$(B/N, \nu)$ は測度ブール代数になる．



証明 自明でないことのみを示す．$y \in B/N$，たとえば，$y = \pi(x)$ として，$\nu(y) = \mu(x)$ と置く．このとき，$\nu(y)$ の値は，x の選び方によらない：x' を $\pi(x') = y$ となるもう1つの B の元とすれば，$\pi(x) = \pi(x')$ から $x \triangle x' \in N$ となり，$x \leqslant x' + (x \cdot -x') \leqslant x' + (x \triangle x')$ だから，$\mu(x) \leqslant \mu(x') + \mu(x \triangle x') = \mu(x')$，同様に $\mu(x') \leqslant \mu(x)$ も示せるからである．

次に，B が σ-完備で，μ は σ-加法的であるとしよう．このとき，N と π は明らかに σ-完備となるから，B/N も σ-完備となる．ν が σ-加法的であることを示そう：$(y_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ を互いに素な B/N の元の族とする．このとき，$\pi(x_n') = y_n$ となる $x_n' \in B$ をとって $x_0 = x_0'$，$x_{n+1} = x_{n+1}' \cdot -(x_0 + \cdots + x_n)$ とすれば，$(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ は $\pi(x_n) = y_n$ を満たす互いに素な B の元の列となる．$\pi(\dot{\sum}_{n \in \boldsymbol{N}} x_n) = \dot{\sum}_{n \in \boldsymbol{N}} y_n$ となるから，$\nu(\dot{\sum}_{n \in \boldsymbol{N}} y_n) = \mu(\dot{\sum}_{n \in \boldsymbol{N}} x_n) = \dot{\sum}_{n \in \boldsymbol{N}} \mu(x_n) = \dot{\sum}_{n \in \boldsymbol{N}} \nu(y_n)$ が成り立つ． ▮

F を自由生成系 U 上の自由ブール代数とする．このとき，F 上の有限加法的測度 μ で，U の任意の異なる元 $u_1, \cdots, u_n$ と $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \{+1, -1\}$ に対し，

（3） $\mu(\varepsilon_1 \cdot u_1 \cdot \cdots \cdot \varepsilon_n \cdot u_n) = 1/2^n$

を満たすものが一意に存在する．このような μ は F 上の**ハール測度**と呼ばれる（演習問題 9.1.5 を参照）．すべての $a \in F$ は，初等積の互いに素な和

（4） $a = p_1 \dot{+} \cdots \dot{+} p_k$

と表わされ，$\mu(p_i)$ は（3）により決まるから，一意性は明らかである．$a>0$ に対し，（4）で $k \geqslant 1$ となるが，（3）により，$0 < \mu(p_1) \leqslant \mu(a)$ であるから，μ は真に正となる．命題 9.1.2 と，上に述べたことから，自由ブール代数が ccc を満たす，という 7.3 で証明された命題の別証が得られる．更に，F の連鎖はすべて可算であるということも分かる：（3）と（4）により，μ の値は常に有理数となるが，$x, y \in X$ で $x<y$ となるものに対し，μ は真に正であることにより，$\mu(x) < \mu(y)$ が成り立つからである．

9.1 の演習問題

9.1.1 μ を σ-完備ブール代数 B 上の測度とする．$\{a_n \mid n \in \boldsymbol{N}\} \subseteq B$ として，$\varepsilon > 0$ を実数とする．このとき，$N \in \boldsymbol{N}$ で $\mu(\sum_{n \in \boldsymbol{N}} a_n) - \mu(\sum_{n \leqslant N} a_n) < \varepsilon$ となるものが存在する．

9.1.2 (B, μ) を測度ブール代数とする．このとき，B は，弱分配則 $D'\aleph_0\aleph_0$ を満たす．

9.1.3 (B, μ) を無原子的な測度ブール代数として，$b \in B$, $\mu(b) = r$ とする．$s \in [0, 1]$ を $0 \leqslant s \leqslant r$ となるものとするとき，$c \in B$ で $c \leqslant b$, $\mu(c) = s$ を満たすものが存在する．

9.1.4 B を有限ブール代数として，$b_1, \cdots, b_n$ を B のすべての原子元とする．このとき，$w_1, \cdots, w_n \in [0, 1]$ で $w_1 + \cdots + w_n = 1$ となるものに対し，$\mu(b_i) = w_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ を満たす B 上の測度が一意に存在する．

9.1.5 F を U 上自由とする．このとき，U に関する F 上のハール測度の存在を示せ．

9.2 有限加法的測度ブール代数の測度ブール代数への埋込み

この節では (A, μ) を常に有限加法的測度ブール代数とする．したがって，特に，μ は真に正である．以下で，μ により A 上の距離 d が定義でき，A の d に関する完備化 $(B, \bar{d})$ を測度ブール代数 (B, ν) に拡張できることを示

す．特に，Aは（同型を除いて）Bの部分ブール代数となり，Bは束としても完備になっている．そこで，(B, ν) を“(A, μ) の μ-完備化”と呼ぶことにする．Bは，一般には，2.4 で構成したAの“束論的”完備化とは一致しない．

$x, y \in A$ に対し，$x \triangle y = x \cdot -y + y \cdot -x$ であったが，

$$d(x, y) = \mu(x \triangle y)$$

と置く．

9.2.1 補題 a）$x \in A$ に対し，$\mu(x) = d(0_A, x)$

b）d は A 上の距離である．

c）有限ブール演算 $+$，$\cdot$，$-$ および写像 $d : A^2 \to [0, 1]$，$\mu : A \to [0, 1]$ は d に関し一様連続である．

証明 a）：$d(0, x) = \mu(0 \triangle x) = \mu(x)$.

b）：$d(x, y) = d(y, x)$ は明らかである．μ が真に正であることから，$d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \mu(x \triangle y) = 0 \Longleftrightarrow x \triangle y = 0 \Longleftrightarrow x = y$ が成り立つ．更に，

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \mu(x \triangle z) \\ &\leqslant \mu(x \triangle y + y \triangle z) \qquad (x \triangle z \leqslant x \triangle y + y \triangle z \text{ だから}) \\ &\leqslant \mu(x \triangle y) + \mu(y \triangle z) \qquad (\text{補題 9.1.1 b) による}) \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

となる．

c）：a）とド・モルガンの法則により，ブール演算 $+$，$-$ が一様連続であることが示せればよい（d については，距離はどの距離空間でも一様連続になるからよい）．ε を任意の正の実数とする．このとき，$x \triangle x' = -x \triangle -x'$ だから，

$$d(x, x') \leqslant \varepsilon \Rightarrow d(-x, -x') \leqslant \varepsilon$$

が成り立つ．一方，$(x+y) \triangle (x'+y') \leqslant (x \triangle x') + (y \triangle y')$ により，$\mu((x+y) \triangle (x'+y')) \leqslant \mu(x \triangle x') + \mu(y \triangle y')$ となる．したがって，

$$d(x, x') \leqslant \varepsilon/2,\ d(y, y') \leqslant \varepsilon/2 \Rightarrow d(x+y,\ x'+y') \leqslant \varepsilon$$

が成り立つ．∎

9.2.2 補題 (A, d) は，A が（ブール代数として）完備で μ が σ-加法的であるとき，つまり，(A, μ) が測度ブール代数のとき，かつそのときに限り，

完備な距離空間となる．

証明 まず (A,d) が完備な距離空間であると仮定しよう．命題 9.1.2 により，A は ccc を満たす．したがって，すべての互いに素な A の元の列 $(x_n)_{n\in N}$ に対し，$\sum^A_{n\in N} x_n$ が存在して，$\mu(\sum^A_{n\in N} x_n)=\sum_{n\in N}\mu(x_n)$ が成り立つことが示せればよい．$n\in N$ に対し，$s_n=x_0\dot{+}\cdots\dot{+}x_n$, $r_n=\mu(s_n)=\mu(x_0)+\cdots+\mu(x_n)$ と置く．このとき，$(s_n)_{n\in N}$ は (A,d) でのコーシー列となる：数列 $(r_n)_{n\in N}$ は $[0,1]$ で単調増加であるから，$r=\sup_{n\in N} r_n=\lim_{n\in N} r_n$ が存在する．$k,l\in N$, $k\leqslant l$ とすれば，補題 9.1.1 a）と $s_k\leqslant s_l$ により，$d(s_k,s_l)=\mu(s_l\cdot -s_k)=\mu(s_l)-\mu(s_k)$ となり，$\lim_{n\in N}\mu(s_n)=r$ だから，十分に大きな k, l をとれば，$d(s_k,s_l)$ は任意に小さくできる．

(A,d) は完備だったから，$(s_n)_{n\in N}$ の d に関する A での極限を s とする．$\mu: A\to \boldsymbol{R}$ は連続だったから，$\mu(s)=\lim_{n\in N}\mu(s_n)=r$ である．$s=\sum^A_{n\in N}s_n$ となることを示そう．まず，s は $\{s_n \mid n\in N\}$ の上界である：そうでなかったとすれば，$n\in N$ で $y=s_n\cdot -s>0$ となるものがある．$\mu(y)>0$ だが，$m>n$ となる任意の $m\in N$ に対し，$y\leqslant s_n\leqslant s_m$ で，$y\leqslant -s$ だから，$y\leqslant s_m\triangle s$ である．したがって，$\mu(y)\leqslant d(s_n,s)$ となるが，これは矛盾である．

仮に，$(s_n)_{n\in N}$ の上界 t で $t<s$ となるものがあったとすれば，すべての $n\in N$ に対し $\mu(s_n)\leqslant\mu(t)<\mu(s)=\lim_{n\in N}\mu(s_n)$ となるが，これは矛盾である．

したがって，$s=\sum^A_{n\in N}s_n=\sum^A_{n\in N}x_n$，また

$$\begin{aligned}\mu(s)&=\lim_{n\in N}\mu(s_n)\\&=\lim_{n\in N}(\mu(x_1)+\cdots+\mu(x_n))\\&=\sum_{n\in N}\mu(x_n)\end{aligned}$$

となるが，これが示すべきことであった．

逆に$(A,\leqslant)$ が束論での意味で完備で，μ は σ-加法的であると仮定してみよう．$(x_n)_{n\in N}$ を (A,d) のコーシー列とする．このとき，$(x_n)_{n\in N}$ の部分列 $(x_{n(k)})_{k\in N}$ で，$d(x_{n(k)},x_{n(k+1)})\leqslant 1/2^{k+1}$ となるものがとれる．$(x_{n(k)})_{k\in N}$ が極限値 x に収束するとき，かつ，そのときに限り，$(x_n)_{n\in N}$ は，同じ極限値 x に収束する．したがって，一般性を失うことなく，初めから $d(x_k,x_{k+1})\leqslant 1/2^{k+1}$ が成り立つと仮定してよい．$(A,\leqslant)$ の完備性により，$s_n=\sum^A_{k\geqslant n}x_k$,

および，$a=\prod_{n\in N}{}^A s_n$ が存在する．補題 9.1.1 e）と $s_0\geqslant s_1\geqslant\cdots$ により，$\mu(a)=\inf_{n\in N}\mu(s_n)=\lim_{n\in N}\mu(s_n)$ となるが，証明の最初の部分でと同じように，$(s_n)_{n\in N}$ はコーシー列で，その極限が a になることが分かる．次に $d(s_n, x_n)\leqslant 1/2^n$ が任意の $n\in N$ に対し成り立つことを示すが，このことから，$\lim_{n\in N}x_n=a$ が導かれる：

$$
\begin{aligned}
s_n\triangle x_n&=s_n\cdot -x_n\\
&=(x_{n+1}\cdot -x_n)+(x_{n+2}\cdot -x_n\cdot -x_{n+1})\\
&\quad+(x_{n+3}\cdot -x_n\cdot -x_{n+1}\cdot -x_{n+2})+\cdots\\
&\leqslant(x_{n+1}\cdot -x_n)+(x_{n+2}\cdot -x_{n+1})+(x_{n+3}\cdot -x_{n+2})+\cdots\\
&\leqslant(x_n\triangle x_{n+1})+(x_{n+2}\triangle x_{n+1})+\cdots
\end{aligned}
$$

だから，補題 9.1.1 c）と $d(x_k, x_{k+1})\leqslant 1/2^{k+1}$ により，$d(s_n, x_n)\leqslant\sum_{k\geqslant n}d(x_k, x_{k+1})\leqslant 1/2^n$ となる．▮

(B,ν) を測度ブール代数として，A を B の部分ブール代数とする．補題 9.2.2 の証明により，A は，B が A から完備に（または σ-完備に）生成されるとき，かつそのときに限り，ν によってひき起こされた距離 d に関する B の稠密部分集合になる：$x\in B$ は，A から σ-生成されるとき，かつそのときに限り，A のコーシー列の極限となるからである．特に，

$$
\begin{aligned}
\delta(B)&=\min\{\,|A|\mid A\text{ は }B\text{ の部分ブール代数で，}d\text{ に関し }B\text{ で稠密}\}\\
&=\min\{\,|A|\mid A\text{ は }B\text{ の部分ブール代数で，}B\text{ は }A\text{ から完備に生成される}\}
\end{aligned}
$$

とすれば，$\delta(B)$ は B のみにより決まり，ν には依存しない．

$\delta(B)$ は，また，単調基数関数となる：$A\subseteq B$ を B の部分ブール代数で B を完備に生成し $|A|=\delta(B)$ となるものとする．$b\in B\setminus\{0\}$ に対し，$p:B\to B\upharpoonright b$, $p(x)=x\cdot b$ は完備な上射となるから，$p[A]$ は，$B\upharpoonright b$ を完備に生成する $B\upharpoonright b$ の部分ブール代数となる．したがって $\delta(B\upharpoonright b)\leqslant\delta(B)$ となる．$\delta(B)$ を B の**厚み**と呼ぶことにする．

補題 9.2.1 の前と同様に，$(B,\bar{d})$ を距離空間 (A,d) の完備化とする．一般性を失うことなく，$A\subseteq B$ で，$\bar{d}$ は d の拡張となっており，A は $\bar{d}$ に関し B で稠密であるとしてよい．したがって，各 $b\in B$ に対し，A の $\bar{d}$ に関

するコーシー列 $(x_n)_{n\in N}$ で $\lim_{n\in N} x_n=b$ となるものがある． A^2 (または A) から A (または $[0, 1]$) への写像 $+$, $\cdot$, $-$, μ は d に関し一様連続であるから，これらの演算は B^2 (または B) から B (または $[0, 1]$) への写像 $\bar{+}$, $\bar{\cdot}$, $\bar{-}$, ν に一意に拡張される． $\bar{+}$ etc. と書く代りに，単に $+$ etc. と書くことにする．これらの演算は，たとえば，$\lim_{n\in N} x_n+\lim_{n\in N} y_n=\lim_{n\in N}(x_n+y_n)$ により定義される．

9.2.3 補題 a) B は (A から B へ上記のように拡張された演算により) ブール代数となり，ν は真に正な B 上の有限加法的測度となる． ν によって B 上に定義される距離は $\bar{d}$ と一致する．特に，補題 9.2.2 により，B は束として ($\leqq$ に関し) 完備になり，ν は σ-加法的となる．

b) $id_A : A\to B$ は，A 上の有限加法的測度 μ が σ-加法的であるとき，かつ，そのときに限り，完備な準同型となる．

証明 a): たとえば，分配則の片方が B で成り立つことを示そう： $a, b, c\in B$ として，$a=\lim_{n\in N} x_n$, $b=\lim_{n\in N} y_n$, $c=\lim_{n\in N} z_n$ とする．ここに $x_n, y_n, z_n\in A$ とする．このとき，$\cdot$, $+$ の連続性により，

$$
\begin{aligned}
a\cdot(b+c)&=\lim_{n\in N} x_n\cdot(\lim_{n\in N} y_n+\lim_{n\in N} z_n)\\
&=\lim_{n\in N}(x_n\cdot y_n+z_n)\\
&=\lim_{n\in N}(x_n\cdot y_n+x_n\cdot z_n)\\
&=\lim_{n\in N} x_n\cdot\lim_{n\in N} y_n+\lim_{n\in N} x_n\cdot\lim_{n\in N} z_n\\
&=a\cdot b+a\cdot c
\end{aligned}
$$

となる． $\bar{d}$ と ν は d と μ の連続な拡張だから，上と同様に $\bar{d}(a, b)=\nu(a\triangle b)$, $\nu(a)=\bar{d}(0_B, a)$ が $a, b\in B$ に対し成り立つことが示せる． $a=\lim_{n\in N} x_n$, ($x_n\in A$) として，ν の定義により，上と同様に $\nu(a)=\lim_{n\in N}\mu(x_n)$ となるから，$\nu(a)\in[0, 1]$ である． ν は真に正である： $\nu(a)=0$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
0=\nu(a)&=\bar{d}(0_B, a)\\
&=\lim_{n\in N} d(0_A, x_n)
\end{aligned}
$$

により，$a=\lim_{n\in N} x_n=0_A=0_B$ となるからである．

ν は有限加法的である： $a=\lim_{n\in N} x_n$, $b=\lim_{n\in N} y_n$, ($x_n, y_n\in A$) を互いに素とする． $n\in N$ に対し，$y_n'=y_n\cdot -x_n$ とすれば，

$$
b=b\cdot -a=\lim_{n\in N}(y_n\cdot -x_n)=\lim_{n\in N} y_n'
$$

だから，

$$\nu(a+b)=\lim_{n\in N}\mu(x_n\dot{+}y_n')=\lim_{n\in N}\mu(x_n)+\lim_{n\in N}\mu(y_n')$$
$$=\nu(a)+\nu(b)$$

が成り立つ．

b)： id_A が完備だとしよう． $x=\dot{\sum}_{n\in N}^{A}x_n$ で $x, x_n\in A$ とする．このとき， $x=\dot{\sum}_{n\in N}^{B}x_n$ となるから， $\mu(x)=\nu(x)=\sum_{n\in N}\nu(x_n)=\sum_{n\in N}\mu(x_n)$ が成り立つ．

逆に， μ を A 上 σ-加法的とする． $x=\sum_{i\in I}^{A}x_i$ として， $x=\sum_{i\in I}^{B}x_i$ が示せればよい． A は ccc を満たすから，一般性を失うことなく $I=N$ としてよい．更に， $(x_n)_{n\in N}$ が互いに素である場合を考えれば十分である． $b=\sum_{n\in N}^{B}x_n$ とすれば， $b\leqslant x$ が成り立つが，

$$\nu(b)=\sum\nu(x_n) \qquad (\nu \text{ は } \sigma\text{-加法的だから})$$
$$=\sum\mu(x_n)$$
$$=\mu(x) \qquad (\mu \text{ は } A \text{ 上 } \sigma\text{-加法的で } x=\dot{\sum}^{A}x_n \text{ だから})$$
$$=\nu(x)$$

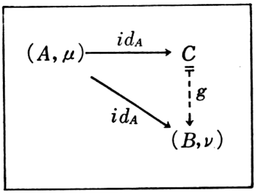
となり， ν は真に正であるから， $b=x$ を得る． ▮

任意の距離空間 (A, d) は， A 上同型なものを除いて，ただ1つの完備化 $(B, \bar{d})$ を持つから，補題 9.2.3 により，次の命題が証明されたことになる：

9.2.4 命題 有限加法的測度ブール代数 (A, μ) は， A 上同型なものを除いて一意に決まる測度ブール代数 (B, ν) に， A が B で（ν によって定められる距離に関して）稠密になるように埋込まれる． μ が A 上 σ-加法的であるとき，かつそのときに限り，この埋込みは，完備になる． ▮

上で構成された測度ブール代数 (B, ν) は (A, μ) の **μ-完備化**と呼ばれる．

9.2.5 系 ブール代数 A が真に正な有限加法的測度を持つとき， A の（束論の意味での）完備化 C も真に正な有限加法的測度を持つ．



証明 (B, ν) を (A, μ) の μ-完備化とする．シコルスキーの拡張定理（定理 3.2.3）により， C の A 上の B への埋込み g が存在する．

ν は $g[C]$ 上に真に正な有限加法的測度をひき起こすから，これによって C 上にも真に正な有限加法的測度が定義できる．　▮

任意の無限基数 κ に対し，F_κ を，$|U|=\kappa$ となる自由生成系 U 上の自由ブール代数として，μ を F_κ 上の U に関するハール測度とする (9.1 を参照). (M_κ, ν_κ) ——これを単に (M_κ, ν) とも書くことにする——を (F_κ, μ) の μ-完備化とする．(M_κ, ν) は，**厚み κ を持つ標準測度ブール代数**と呼ばれる．実際，$\delta(M_\kappa)=\kappa$ となることが例 9.2.2 で示される．

例 9.2.1　$\kappa=\omega$ とする．F_ω の μ-完備化 M_ω は測度ブール代数だが，M_ω は $[0, 1]$ のボレル代数をルベーグ測度 0 の集合全体のイデアルで割ったものと同型になることが示せる．F_ω の束論の意味での完備化 R は，完備で，F_ω が R で半順序に関し稠密になっているもの，として特徴づけられるから，系 5.2.3 および系 2.4.6 により，$R\cong RO([0, 1])$ となる．定理 3.3.3 により，$RO([0, 1])$ は，$[0, 1]$ のボレル代数を第 1 類の集合のイデアルで割ったものと同型になる．しかしながら，$RO([0, 1])$ は真に正な σ-加法的測度を持たない (9.1 を参照).　▮

任意の測度ブール代数 (B, ν) に対し，B の厚み $\delta(B)$ が補題 9.2.2 の後で定義されていた．これに関して：

例 9.2.2　$\kappa\geqslant\omega$ に対し，$\delta(M_\kappa)=\kappa$ である：F_κ は濃度 κ を持ち M_κ で ν に関し稠密だから，$\delta(M_\kappa)\leqslant\kappa$ は明らかである．$|M_\kappa|\geqslant\omega$ だから，$\delta(M_\kappa)\geqslant\omega$ となり，これにより，$\kappa=\omega$ の場合における上の主張が示される．$\kappa>\omega$ の場合には，以下のようにすればよい：U を $F_\kappa\subseteq M_\kappa$ の自由生成系で，U に関して F_κ 上のハール測度 μ が定義されているものとする．$V\subseteq U$ に対し，F_V を V から生成された F_κ の部分ブール代数とする．このとき，U の任意の真部分集合 V から生成された F_κ の部分ブール代数 F_V は F_κ で μ に関し稠密とならない：$u\in U\setminus V$ とすると，任意の $v\in F_V$ に対し，

$$
\begin{aligned}
d(u, v) &= \mu(u\cdot -v)+\mu(v\cdot -u)\\
&= \frac{1}{2}\mu(-v)+\frac{1}{2}\mu(v)
\end{aligned}
$$

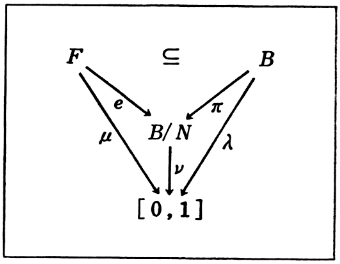
$$=\frac{1}{2}$$

となり,

$$d(u,\ F_V)=\inf\ \{d(u,v)\ |\ v\in F_V\}=\frac{1}{2}$$

となるからである. さて, M_κ の部分ブール代数 A で $|A|<\kappa$ となるものは, M_κ で μ に関して稠密であり得ないことを示そう : $x\in A$ とすると, $x\in \overline{F}_\kappa$ (F_κ の距離空間 $(M_\kappa, \bar{d})$ での閉包) だから, $V(x)\subseteq U$ で $|V(x)|\leqslant\omega$ かつ $x\in\overline{F}_{V(x)}$ となるものがある. $V=\bigcup_{x\in A} V(x)$ の濃度は κ より小さいから, $V\neq U$ となり, $X\subseteq\overline{F}_V$ は M_κ で ν に関して稠密にならない. ▮

9.2 の演習問題



9.2.1 (ルベーグ測度についての知識を持っている読者のための問題) B を $[0,1]$ 上のボレル代数として, $\lambda: B\to[0,1]$ をルベーグ測度の B 上への制限とする. 命題 9.1.4 でと同様に, $N=\{x\in B\ |\ \lambda(x)=0\}$, π を自然な写像, ν を $\nu\circ\pi=\lambda$ となる B/N 上の測度とする.

$1\leqslant n$ に対し, $u_n\in B$ を

$u_n=\bigcup\{[2k/2^n,\ (2k+1)/2^n)\ |\ 0\leqslant k\leqslant 2^{n-1}\}$ で定義する. このとき :

a) $U=\{u_n\ |\ n\in \boldsymbol{N}\}$ によって生成された B の部分ブール代数 F は, U 上自由となり, $\mu=\lambda\upharpoonright F$ は U に関する B 上のハール測度となる.

b) $e=\pi\upharpoonright F$ は単射である.

c) B/N の部分ブール代数 $e[F]$ は B/N で ν によりひき起こされた距離に関して稠密である.

$(B/N,\nu)$ は, したがって, 同型を除いて, 厚み $\aleph_0$ を持つ標準測度ブール代数と一致する.

9.3 測度ブール代数の構造

この節では, 測度ブール代数の完全な特徴づけを与える次の定理を証明する.

9.3.1 定理 (D. マハラム) 任意の測度ブール代数 (B,μ) に対し, 可算個の測度ブール代数 (B_i,μ_i), $i\in I$ があって, 各 (B_i,μ_i) は2元ブール代数であるか, または, 基数 $\kappa(i)$ が一意に決まって, 厚み $\kappa(i)$ を持つ標準測度ブ

ール代数 $(M_{\kappa(i)}, \nu_{\kappa(i)})$ と同型になり，

$$(B, \mu)\cong\prod_{i\in I}(B_i, \mu_i)$$

が成り立つ．

この定理は，直積分解に関する考察から，以下に述べる定理 9.3.1′ に容易に帰着される．

ブール代数 B に対し，$B^+=B\backslash\{0\}$ と書くことにする．(B,μ) を測度ブール代数として，$a\in B^+$ とする．

以下の証明では，

$$\mu_a : B\to[0, 1]$$

$$\mu_a(x)=\mu(x\cdot a)/\mu(a)$$

がたびたび用いられる．確率論の言葉でいえば，$\mu_a(x)$ は a に関する x の条件つき確率と考えられる．μ_a は，たとえば $\mu_a(-a)=0$ となるから，一般には，真に正ではない．しかし，$B\restriction a$ は，明らかに，$\nu_a=\mu_a\restriction(B\restriction a)$ により測度ブール代数になる．

B の任意の分割 $\{a(i) \mid i\in I\}\subseteq B^+$ は，7.1 で見たように，直積分解 $f: B\xrightarrow{\cong}\prod_{i\in I}B\restriction a(i)$ をひき起こす．ここに，f は $f(x)=(x\cdot a(i))_{i\in I}$ で定義される同型写像である．また，各 $B\restriction a(i)$ は $\nu_{a(i)}$ により測度ブール代数になる．逆に，μ は測度 $\nu_{a(i)}$ と実数 $\mu(a(i))$，$(i\in I)$ により一意に決まる：補題 9.1.2 により I は可算となり，$x\in B$ に対し，$x=\dot{\sum_{i\in I}}x\cdot a(i)$ により，

$$\mu(x)=\sum_{i\in I}\mu(x\cdot a(i))=\sum_{i\in I}\mu(a(i))\cdot\nu_{a(i)}(x\cdot a(i))$$

となるからである．

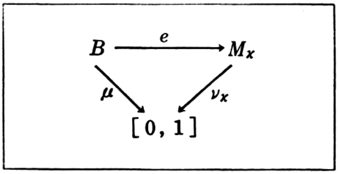
このとき，(B,μ) は測度ブール代数 $(B\restriction a(i), \nu_{a(i)})$，$i\in I$ の **直積** であるという．

以上により，(B,μ) の構造は，$a(i)$ をうまく選んで $(B\restriction a(i), \nu_{a(i)})$ の構造が記述できれば，明らかになることが分かる．

さて，9.2 で定義された基数関数 δ は単調だったから，補題 7.1.4 により，B の分割 $\{a(i) \mid i\in I\}$ で，各 $(B\restriction a(i), \nu_{a(i)})$ が δ-一様になるものがある．したがって，定理 9.3.1 の証明には，δ-一様な測度ブール代数の構造が分かれば十分である．$\delta(B)$ が有限の場合には，B は有限となるから，一様性

から，$B\cong 2$ となる．μ は，このとき，$\mu(0_B)=0$，$\mu(1_B)=1$ によって決まる．$\delta(B)$ が無限のときには，B の構造は次の定理によって記述される：

9.3.1′ 定理　(B,μ) を δ-一様な測度ブール代数で $\kappa=\delta(B)$ が無限になるものとする．このとき，B から標準測度ブール代数 M_κ への同型写像 e で $\mu=\nu_\kappa\circ e$ を満たすものがある．



9.3.2 系　(B,μ) が δ-一様な測度ブール代数なら，B は 7.1 の意味で一様である．

証明　$\delta(B)$ が有限なら，$B\cong 2$ は明らかに一様である．$\kappa=\delta(B)$ が無限なら，すべての $a\in B^+$ に対し，$B\restriction a$ は，ν_a により，再び測度ブール代数になっている．B が δ-一様であることから，$B\restriction a$ も δ-一様となり，$\delta(B\restriction a)=\delta(B)=\kappa$ である．したがって，定理 9.3.1′ により，$B\restriction a\cong M_\kappa\cong B$ となる．▮

定理 9.3.1′ は，以下に述べる命題 9.3.3 からほとんどストレートに帰結されるが，まず，そこで必要となることがらの定義をしよう．(B,μ) を測度ブール代数とする．B の部分ブール代数 A は，A と埋込み $id_A\ A\to B$ が完備であるとき，B の**完備部分ブール代数**と呼ばれる．$X\subseteq B$ に対し，$[X]^c$ を X から完備に生成された B の部分ブール代数とする．つまり，

$$[X]^c=\bigcap\{A \mid X\subseteq A,\ A\ \text{は}\ B\ \text{の完備部分ブール代数}\}$$

である．B の 2 つの部分ブール代数 A, C は，任意の $a\in A$ と $c\in C$ に対し，$\mu(a\cdot c)=\mu(a)\cdot\mu(c)$ が成り立つとき，**μ-独立**であるという．特に，このときには，A と C は，7.2 の意味でも独立になる．d は常に 9.2 でのように μ によってひき起こされた B 上の距離とする．

9.3.3 命題　(B,μ) を δ-一様な測度ブール代数として，A を B の完備部分ブール代数で $\delta(A)<\delta(B)=\kappa$, $\omega\leqslant\kappa$ となるものとする．このとき，$b\in B$ と $n\in N$ に対し，B の部分ブール代数 C で，

a）$m=2^n$ として，$|C|=2^m$ で，C のすべての原子元 u に対し $\mu(u)=1/2^n$ が成り立つ，

b）C と A は μ-独立である，

c) $d(b, [A \cup C]^c) = \inf\{d(b, x) \mid x \in [A \cup C]^c\} \leqslant 1/2^{n-1}$

となるものがある．特に，C は，$|U| = n$ となるある $U \subseteq C$ 上自由で，$\mu \restriction C$ は U に関するハール測度となる．

定理 9.3.1′ の命題 9.3.3 からの証明　ここでは，$\kappa \geqslant \aleph_1$ の場合のみを考察しよう．$\kappa = \aleph_0$ の場合はこれとは多少異なり，もう少し簡単な証明により示される——練習問題 9.3.1 を参照.

さて，$\delta(B) = \kappa$ により，距離 d に関して B で稠密な部分集合 $\{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \subseteq B$ をとる．上昇列

$$(F_\alpha, U_\alpha)_{\alpha < \kappa}$$

を，F_α が U_α 上自由な B の部分ブール代数で，$|U_\alpha| \leqslant \aleph_0 \cdot |\alpha|$，$\mu \restriction F_\alpha$ は U_α に関するハール測度で，$d(b_\alpha, [F_{\alpha+1}]^c) = 0$ となるように構成する．このとき，$F = \bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha$ は $U = \bigcup_{\alpha < \kappa} U_\alpha$ 上自由で $\mu \restriction F$ は U に関するハール測度となる．したがって，F が B で d に関し稠密であることが示せれば，$(B, \mu) \cong (M_\kappa, \nu_\kappa)$ がいえる．$b \in B$ と正の実数 ε を任意にとる．$\{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ が d に関して稠密であることから，$\alpha < \kappa$ で $d(b, b_\alpha) < \varepsilon/2$ となるものがある．また，$d(b_\alpha, [F_{\alpha+1}]^c) = 0$ により，$x \in [F_{\alpha+1}]^c \subseteq [F]^c$ で $d(b_\alpha, x) < \varepsilon/2$ となるものがある．したがって，$d(b, x) < \varepsilon$ となる．以上で，$[F]^c$ は B で d に関し稠密であることが示せた．一方，補題 9.2.2 の後の注意により，$[F]^c$ は F の d に関する閉包になっているから，F は B で d に関し稠密であることが分かる．

F_α と U_α を上のように構成するには，$F_0 = \mathbf{2}$，$U_0 = \varnothing$ と置き，極限数 λ に対しては，

$$F_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} F_\alpha, \quad U_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} U_\alpha$$

とする．また，(F_α, U_α) が既に構成されたとき，

$$F_{\alpha+1} = [F_\alpha \cup \bigcup_{n \in N} C_n], \quad U_{\alpha+1} = U_\alpha \cup \bigcup_{n \in N} V_n$$

と置けばよい．ここに，C_n は B の有限な部分ブール代数，また，V_n は C_n の部分集合で，

1. C_n は V_n 上自由で $\mu \restriction C_n$ は V_n に関するハール測度
2. C_{n+1} と $[F_\alpha \cup C_0 \cup \cdots \cup C_n]$ は μ-独立
3. $d(b_\alpha, [F_\alpha \cup C_0 \cup \cdots \cup C_n]^c \leqslant 1/2^n$

となるよう帰納的に選ぶ．これは，

$$\delta([F_\alpha \cup C_\alpha \cup \cdots \cup C_n]^c) \leqq \aleph_0 \cdot |\alpha| < \kappa = \delta(B)$$

と命題 9.3.3 により可能である． ▮

命題 9.3.3 の証明には，以下の補題 9.3.4 から補題 9.3.10 までが必要となる．このうちの最初の 2 つは，補題 9.2.2 の後での定義を拡張して任意の完備ブール代数 B に対し

$$\delta(B) = \min\{\ |X|\ |\ X \subseteq B \text{ で } [X]^c = B\}$$

とすれば，任意の完備ブール代数で成り立つ．

以下この節では，常に次のことを仮定する：

(B, μ) は δ-一様な測度ブール代数で $\delta(B) = \kappa \geqq \omega$，

A は B の完備部分ブール代数，

$\delta(A) < \delta(B)$．

9.3.4 補題 $u \in B$ で，u から生成された B の部分ブール代数 $\{1, 0, u, -u\}$ が A と独立になるようなものが存在する．

証明 $\mathscr{P}$ を A の真の分割の全体の集合とする．A が B の完備部分ブール代数であることから，各 $P \in \mathscr{P}$ は B の分割でもある．補題 8.2.5 の前で定義された表記法により，$\bigcup \mathscr{P} = A \backslash \mathbf{2}$ で，$\mathscr{P}^{\Sigma\Pi} = A$ である．$\delta(A) < \delta(B)$ で，B が δ-一様だから，補題 8.2.5 の仮定が満たされていることが分かるが，そこで構成された u をとればよい． ▮

9.3.5 補題 B の分割 $\{v_n \mid n \in N\}$ で，すべての $n \in N$ と $a \in A^+$ に対し $a \cdot v_n > 0$ となるものがある．

証明 補題 9.3.4 により，$u_n \in B$ を $[u_n]$ が $[A \cup \{u_0, \cdots, u_{n-1}\}]^c$ と独立になるように帰納的に構成できる．このとき，$\{u_n \mid n \in \omega\}$ は，A と独立な B の無限部分ブール代数 F の自由生成系となる．補題 2.3.2 により，F^+ の互いに素な部分集合 $\{v_n' \mid n \in N\}$ が存在するが，

$$v_n = v_n', \quad (n \geqq 1)$$

$$v_0 = -\sum_{n \geqq 1}^{B} v_n$$

と置けばよい． ▮

以下では，前に定義された μ_a の近似である μ_a と $\bar{\mu}_a$ について考察する．$a \in A^+$ と $x \in B$ に対し，

$$\bar{\mu}_a(x) = \sup\{\mu_\alpha(x) \mid 0 < \alpha \leqslant a,\ \alpha \in A\}$$

$$\mu_a(x) = \inf\{\mu_\alpha(x) \mid 0 < \alpha \leqslant a,\ \alpha \in A\}$$

と定義する．したがって，$\mu_a(x) \leqslant \mu_a(x) \leqslant \bar{\mu}_a(x)$ である．

9.3.6 補題　r を $0 < r \leqslant 1$ となる実数として，$a \in A^+$ と $c \in B$ は $\mu_a(c) < r$ を満たすものとする．このとき，$a' \in A$, $0 < a' \leqslant a$ で，すべての $\alpha \in A$, $0 < \alpha \leqslant a'$ に対し $\mu_\alpha(c) < r$ となるものが存在する．

証明　そうでなければ，

$$D = \{\alpha \leqslant a \mid 0 < \alpha,\ \mu_\alpha(c) \geqslant r\}$$

は $A \upharpoonright a$ で稠密になるが，たとえば，$a = \dot{\sum_{i \in I}} a_i$, $a_i \in D$ とすれば，$\mu_a(c) = \sum_{i \in I} \mu(c \cdot a_i) / \sum_{i \in I} \mu(a_i) \geqslant r$ となるから矛盾する．▮

9.3.7 補題　$\beta \in B^+$ として，r を $0 < r \leqslant 1$ となる実数とする．このとき，$b \in B$ で $0 < b \leqslant \beta$ かつ $\bar{\mu}_1(b) \leqslant r$ となるものが存在する．

証明　$\nu = \mu_\beta \upharpoonright (B \upharpoonright \beta)$ として，測度ブール代数 $(B \upharpoonright \beta, \nu)$ とその部分ブール代数 $A \cdot \beta = \{a \cdot \beta \mid a \in A\}$ を考える．B は δ-一様だから，$\delta(A \cdot \beta) \leqslant \delta(A) < \delta(B \upharpoonright \beta)$ となり，$B \upharpoonright \beta$ も δ-一様である．補題 9.3.5 により，$B \upharpoonright \beta$ の分割

$$\beta = \dot{\sum_{n \in N}} \beta_n$$

で $\beta_n \cdot \alpha > 0$ がすべての $\alpha \in (A \cdot \beta)^+$ に対し成り立つものがある．$\nu(\beta) = \sum_{n \in N} \nu(\beta_n)$ だから，$n \in N$ で $\nu(\beta_n) < r$ となるものがある．補題 9.3.6 を $B \upharpoonright \beta$, $A \cdot \beta$, $a = \beta = 1_{A \cdot \beta}$, $c = \beta_n$ に適用して，$a' \in (A \cdot \beta)^+$ ですべての $0 < \alpha \leqslant a'$ となる $\alpha \in A \cdot \beta$ に対し，

$$\begin{aligned} r > \nu_\alpha(\beta_n) &= \nu(\alpha \cdot \beta_n) / \nu(\alpha) \\ &= (\mu(\alpha \cdot \beta \cdot \beta_n) / \mu(\beta)) / (\mu(\alpha \cdot \beta) / \mu(\beta)) \\ &= \mu(\alpha \cdot \beta \cdot \beta_n) / \mu(\alpha \cdot \beta) \end{aligned}$$

が成り立つようなものがとれる．$b = \beta_n \cdot a'$ と置く．$b \leqslant \beta$ であることは明らかである．$a' \cdot \beta$ は $A \cdot \beta$ の正の元で β_n は $A \cdot \beta$ と独立だから，$\beta_n \leqslant \beta$ により，$0 < \beta_n \cdot (a' \cdot \beta) = b$ である．すべての $\alpha \in A^+$ に対し $\mu_\alpha(b) \leqslant r$ となる

ことを示そう．$\alpha\cdot\beta=0$ なら，$b\leqslant\beta$ により $\alpha\cdot b=0$ となり，$\mu_\alpha(b)=0$ である．よって，$\alpha\cdot\beta>0$ とする．$b\leqslant a'$ だから，$\alpha\leqslant a'$ に対し上の主張が示せれば十分だが，このときには，$b=a'\cdot\beta_n\leqslant\beta$, $\alpha\leqslant a'$ により $b\cdot\alpha=a'\cdot\beta_n\cdot\alpha=\beta_n\cdot\alpha=\alpha\cdot\beta\cdot\beta_n$ となるから，

$$\mu_\alpha(b)=\mu(b\cdot\alpha)/\mu(\alpha)=\mu(\alpha\cdot\beta\cdot\beta_n)/\mu(\alpha\cdot\beta)<r$$

である． ∎

9.3.8 補題 $\beta\in B^+$ として，r を $0<r\leqslant 1$ となる実数で $\mu_1(\beta)\geqslant r$ が成り立っているものとする．このとき，$0<b\leqslant\beta$ となる $b\in B$ で $\bar{\mu}_1(b)=\mu_1(b)=r$ を満たすものが存在する．特に，$\mu(b)=r$ で b は (i.e. b から生成された B の部分ブール代数 $\{1, 0, b, -b\}$ は) A と μ-独立となる．

証明 $M=\{x\in B\restriction\beta \mid \bar{\mu}_1(x)\leqslant r\}$ とする． 補題 9.3.7 により M は空集合ではない．M の任意の連鎖 $(x_i)_{i\in I}$ に対し $\sum_{i\in I}^B x_i$ は M での上界となるから，ツォルンの補題により，M は極大元 b を持つ．$r\leqslant\mu_1(b)$ が示せればよい．そうでなければ，$a\in A^+$ で $\mu_a(b)=t<r$ となるものがある．$t<s<r$ となるように $s\in\boldsymbol{R}$ をとる．補題 9.3.6 により，一般性を失うことなく，

$$(*)\quad 0<\alpha\leqslant a,\ \alpha\in A\Rightarrow\mu_\alpha(b)<s$$

が成り立つと仮定してよい．$b\leqslant\beta$, $\mu_a(\beta)\geqslant r$, および $\mu_a(b)<r$ により $a\cdot\beta\cdot -b>0$ である：そうでなければ，$a\cdot\beta\leqslant b$ となり，$a\cdot\beta=a\cdot b$ となってしまうからである．補題 9.3.7 により，$b'\in B$ で $0<b'\leqslant a\cdot\beta\cdot -b$ かつ $\bar{\mu}_1(b')\leqslant r-s$ となるものが選べる．このとき，$b<\dot{b}+b'\leqslant\beta$ で，$\bar{\mu}_1(b+b')\leqslant r$ となることが示されるが，これは b の極大性に矛盾する： $\alpha\in A^+$ として $\mu_\alpha(b+b')\leqslant r$ を示そう．$a_1=\alpha\cdot a$, $a_2=\alpha\cdot -a$ として，$\alpha=a_1\dot{+}a_2$ であるから，

$$\begin{aligned}\mu(\alpha\cdot(b\dot{+}b'))&=\mu(a_1\cdot b)+\mu(a_1\cdot b')+\mu(a_2\cdot b)+\mu(a_2\cdot b')\\&\leqslant\mu(a_1)\cdot s+\mu(a_1)\cdot(r-s)+\mu(a_2)\cdot r\\&=\mu(\alpha)\cdot r\end{aligned}$$

となる．ここで，(＊) と b' の選び方，および $a_2\cdot b'=0$ が用いられた．したがって $\mu_\alpha(b+b')\leqslant r$ である． ∎

9.3.9 補題 $b\in B$, $n\in\boldsymbol{N}$ として，$\bar{\mu}_1(b)-\mu_1(b)<1/2^n$ が成り立っている

とする．このとき，B の分割 $\{u(1), \cdots, u(2^n)\}$ と $k\in\{0, \cdots, 2^n\}$ で

a）$\mu(u(i))=1/2^n$，$u(i)$ は A と μ-独立，

b）$\beta=u(1)+\cdots+u(k)$ として，$\beta<b$ かつ $u(k+3)+\cdots+u(2^n)\leqslant -b$,

を満たすものがある．特に，$d(b, \beta)=\mu(b\cdot -\beta)<1/2^{n-1}$ が成り立つ．

証明　$e=\mu_1(b)$ と置く．$k\in\boldsymbol{N}$ を $0\leqslant k\leqslant 2^n$ で

$$(*)\quad k/2^n\leqslant e<k+1/2^n$$

となるものとする．補題 9.3.8 を k 回用いることにより，互いに素な $u(1)$, $\cdots$, $u(k)\in B$ で $\mu(u(i))=1/2^n$，$u(1)+\cdots+u(k)\leqslant b$ となり，$u(i)$ は A と μ-独立であるようなものがとれる．

$$\mu_1(-b)=1-\bar{\mu}_1(b),$$
$$\bar{\mu}_1(b)-\mu_1(b)<1/2^n$$

だから，

$$\bar{\mu}_1(b)<(k+2)/2^n,$$
$$\mu_1(-b)>(2^n-(k+2))/2^n$$

となる．上と同様に，補題 9.3.8 を $2^n-(k+2)$ 回用いることによって，a）を満たす，互いに素な $u(k+3)$, $\cdots$, $u(2^n)\leqslant -b$ が得られる．

$$v=1\cdot-(u(1)+\cdots+u(k)+u(k+3)+\cdots+u(2^n))$$

は A と μ-独立で $\mu(v)=\mu_1(v)=2/2^n$ となる．

再び補題 9.3.8 により，$u(k+1)$, $u(k+2)$ で，a）を満たし，$v=u(k+1)+u(k+2)$ となるようなものがとれる．

$b\cdot-\beta\leqslant u(k+1)+u(k+2)$ から，$\mu(b\cdot-\beta)\leqslant 1/2^{n-1}$ となる． ∎

9.3.10 補題　$b\in B$ とし，$\varepsilon>0$ を実数とする．このとき，

$$D=\{a\in A^+ \mid \bar{\mu}_a(b)-\mu_a(b)<\varepsilon\}$$

は A で稠密となる．

証明　$a'\in A^+$ として $a<a'$ となる $a\in D$ を構成する．実数 δ, $0<\delta<\varepsilon$ を任意にとり，$r=\mu_{a'}(b)+\delta$ と置く．このとき，$a<a'$ となる $a\in A^+$ で，すべての $0<\alpha\leqslant a$ に対し $\mu_\alpha(b)<r$ となるものがある：そうでなければ，

$$M=\{\alpha\in(A\restriction a')^+ \mid \mu_\alpha(b)\geqslant r\}$$

は $A\restriction a'$ で稠密となるから，すべての $a\leqslant a'$ は M の元の互いに素な和とし

て表わされる．したがって，$\mu_a(b)\geqq r$ が，すべての $a\leqq a'$ に対して成り立つから，特に，$\mu_{a'}(b)\geqq r$ となり矛盾である．

a は D の元である：a の選び方により

$$\bar{\mu}_a(b)\leqq r=\mu_{a'}(b)+\delta<\mu_a(b)+\varepsilon$$

となる． ▮

命題 9.3.3 の証明 $\varepsilon=1/2^n$ と与えられた $b\in B$ に対し，補題 9.3.10 で稠密であることが証明された集合 D をとる．$\{a(i) \mid i\in I\}$ を A の分割で $a(i)\in D$ となるものとする．各 $i\in I$ に対し，$B\upharpoonright a(i)$ 上の測度 $\nu_{a(i)}=\mu_{a(i)}\upharpoonright(B\upharpoonright a(i))$，$B\upharpoonright a(i)$ の部分ブール代数 $A\upharpoonright a(i)$，および $B\upharpoonright a(i)$ の元 $b(i)=b\cdot a(i)$ に補題 9.3.9 を適用して，以下の条件を満たす分割

$$a(i)=u(i,1)\dot{+}\cdots\dot{+}u(i,2^n)$$

がとれる：

$\nu_{a(i)}(u(i,j))=1/2^n$，$u(i,j)$ は $B\upharpoonright a(i)$ で $A\upharpoonright a(i)$ と $\nu_{a(i)}$-独立，

ある $k(i)\in\{0,\cdots,2^n\}$ に対し，$B\upharpoonright a(i)$ の元 $\beta(i)=u(i,1)+\cdots+u(i,k(i))$ は不等式

$$\beta(i)\leqq b(i),\quad \nu_{a(i)}(b(i)\cdot-\beta(i))\leqq 1/2^{n-1}$$

を満たす．

$1\leqq j\leqq 2^n$ に対し，$u(j)=\sum_{i\in I}u(i,j)$ と置き，$\beta=\sum_{i\in I}\beta_i$ とする．このとき，$u(1),\cdots,u(2^n)$ から生成された B の部分ブール代数 C において，$u(1),\cdots,u(2^n)$ は原子元の全体となり，$\mu(u(j))=1/2^n$ がすべての $1\leqq j\leqq 2^n$ に対し成り立つ．$\beta\leqq b$，$d(b,\beta)\leqq 1/2^{n-1}$ となるが，$a(i)\in A$ で，$a(i)\cdot u(j)=u(i,j)\in[A\cup C]^c$ だから，β は $[A\cup C]^c$ の元である．したがって，$d(b,[A\cup C]^c)\leqq 1/2^{n-1}$ が成り立つ． ▮

9.3 の演習問題

9.3.1 命題 9.3.3 で A が有限である場合を，補題 9.3.4 から補題 9.3.10 までを用いずに直接証明せよ．

9.3.2 命題 9.3.3 を仮定して，定理 9.3.1′ で $\kappa=\aleph_0$ となる場合を証明せよ．

9.4 弱一様・完備ブール代数

この節では，弱一様・完備ブール代数の特徴づけを与える定理（定理 9.4.3）を証明する．この証明において，測度ブール代数の構造定理（より正確には：系 9.3.2）が用いられる．

ブール代数 B は，任意の $a, b \in B^+$ に対し $x, y \in B^+$ が存在して，$x \leqslant a$, $y \leqslant b$, $B \upharpoonright x \cong B \upharpoonright y$ となるとき，**弱一様**であるという．

例 9.4.1 κ を基数，H を完備で一様なブール代数とするとき，$B = H^\kappa$ は弱一様となる：H が一様であることにより，

$$D = \{x \in B^+ \mid B \upharpoonright x \cong H\}$$

が B で稠密になるからである．任意の基数 $\alpha < sat(H)$（$sat(H) = \sup\{|P|^+ | P \subseteq H^+$ は分割$\}$ であった）に対し，$H^\alpha = H$ である：$P \subseteq H^+$ を $|P| = \alpha$ となる H の分割として

$$H \cong \prod_{p \in P} H \upharpoonright p \cong H^{|P|} = H^\alpha$$

となるからである．$sat(H) < \alpha < \beta$ となる基数 α, β に対しては，$sat(H^\alpha) = \alpha^+$, $sat(H^\beta) = \beta^+$ であるから，明らかに $H^\alpha \ncong H^\beta$ である．逆に，$b, c \in B^+$ を任意にとり，$b = \dot{\sum} X$, $c = \dot{\sum} Y$,（$X, Y \subseteq D$）とすれば，

$$B \upharpoonright b \cong \prod_{x \in X} H \upharpoonright x \cong H^{|X|}, \quad B \upharpoonright c \cong H^{|Y|}$$

となるから，$1 \leqslant |X|$, $|Y| < sat(H)$ あるいは，$|X| = |Y|$ の成り立つとき，かつ，そのときに限り $B \upharpoonright b \cong B \upharpoonright c$ が成り立つことが分かる． ▮

例 9.4.2 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間として，I を無限集合とする．このとき，$C = RO(X^I)$ は弱一様である：空でない $u, v \in RO(X^I)$ に対し，空でない基本開集合 $b \subseteq u$, $c \subseteq v$ で

$$b = \prod_{i \notin I(0)} X_i \times \prod_{i \in I(0)} u_i, \quad c = \prod_{j \notin J(0)} X_j \times \prod_{j \in J(0)} v_j$$

の形をしたものがある．ここに $I(0)$, $J(0) \subseteq I$ は有限で，$i \notin I(0)$, $j \notin J(0)$ に対し $X_i = Y_i = X$ となり，u_i, v_j は X の空でない正則開集合であるとする．$I(0) = \{i(1), \cdots, i(n)\}$, $J(0) = \{j(1), \cdots, j(m)\}$ としよう．I は有限だから，$I(1)$, $J(1) \subseteq I$ で

$$I(0) \cap I(1) = \varnothing, \quad I(1) = \{i'(1), \cdots, i'(m)\}$$
$$J(0) \cap J(1) = \varnothing, \quad J(1) = \{j'(1), \cdots, j'(n)\}$$

となるものが選べる．$1\leqslant k\leqslant m$ に対し，$u_{i'(k)}=v_{j(k)}$ とし，$1\leqslant k\leqslant n$ に対し，$v_{j'(k)}=u_{i(k)}$ と定義する．このとき，

$$d=\prod_{i\notin I(0)\cup I(1)} X_i\times\prod_{i\in I(0)} u_i\times\prod_{i\in I(1)} u_i,$$
$$e=\prod_{j\notin J(0)\cup J(1)} X_j\times\prod_{j\in J(0)} v_j\times\prod_{j\in J(1)} v_j$$

は，互いに位相同型な b および c の正則開部分集合となるから，$C\restriction d\cong RO(d)\cong RO(e)\cong C\restriction e$ が成り立つ． ▮

ブール代数 B に対し $\tau(B)$ を B の同型タイプとする．たとえば，$\tau(B)=\{A\mid A\cong B\}$ と定義すると，$\tau(B)$ は真のクラスになってしまうが，このことにより起きる問題には，ここでは目をつぶることにする．

$\boldsymbol{T}=\{\tau(B)\mid B$ は完備ブール代数$\}$

とする．もちろん $\boldsymbol{T}$ 自身も真のクラスとなる．以下に述べる定理 9.4.3 の証明は，$\boldsymbol{T}$ 上に半順序 $\leqslant$ と演算 $+$，$\sum$ を定義して，これらの弱一様ブール代数に対する振舞いを調べることによってなされる．$s,t\in\boldsymbol{T}$ に対し，$s=\tau(B)$，$t=\tau(C)$ として，

$$s\leqslant t\Longleftrightarrow x\in C \text{ で } B\cong C\restriction x \text{ となるものがある}$$

と定義する．補題 7.1.6 により，$\leqslant$ は $\boldsymbol{T}$ 上の半順序となる．特に，B を固定するとき，

$$T(B)=\{t\in\boldsymbol{T}\mid t\leqslant\tau(B)\}$$
$$=\{\tau(B\restriction x)\mid x\in B\}$$

は $\leqslant\restriction T(B)$ により最小元 $0_{T(B)}=\tau(B\restriction 0)$ および最大元 $1_{T(B)}=\tau(B)$ を持つ半順序集合となる．B が固定されているときには，$\tau(B\restriction b)$ を $\tau(b)$ で表わすことにする．

9.4.1 補題　B を完備ブール代数とする．このとき，

a) B は弱一様
　$\Longleftrightarrow(T(B),\leqslant)$ は全順序集合

b) B は一様なブール代数の巾
　$\Longleftrightarrow(T(B),\leqslant)$ は整列集合
　$\Longleftrightarrow(T(B),\leqslant)$ は自明であるか，最小元以外の元のうちの最小元を持つ

証明 a)： ⇐) $(T(B),\leqslant)$ が全順序集合だとする．$a,b\in B^+$ として，$r=\min(\tau(a),\tau(b))$ とする．$0<a,b$ により $\tau(a)$，$\tau(b)$，r は $0_{T(B)}$ と異なる．$0<r\leqslant\tau(a)$，$0<r\leqslant\tau(b)$ だから，$x,y\in B^+$ で $x\leqslant a$，$x\leqslant b$ かつ，$\tau(x)=\tau(y)$ つまり，$B\restriction x\cong B\restriction y$ となるものがある．したがって，B は弱一様である．

⇒) $s=\tau(a)$，$t=\tau(b)\in T(B)$ として，$B\restriction a$ が，$B\restriction b$ のある直積因子と同型であるか，あるいはその逆が成り立つことを示す．族 $F=\{(x_i,y_i)|i\in I\}$ を，

$$0<x_i<a,\ 0<y_i<b$$

$$\tau(x_i)=\tau(y_i)$$

$$i,\ j\in I,\ i\neq j \text{ なら，} x_i\cdot x_j=y_i\cdot y_j=0$$

という性質を持つもののうち極大なものとする．このとき，$\dot{\sum\limits_{i\in I}}x_i=a$ または $\dot{\sum\limits_{i\in I}}y_i=b$ である：そうでなければ，$\sum\limits_{i\in I}x_i<a$ かつ $\sum\limits_{i\in I}y_i<b$ となるから，B が弱一様であることにより，F が極大でなくなってしまうからである．仮に $\dot{\sum\limits_{i\in I}}x_i=a$ とすれば，$y=b\cdot-\dot{\sum\limits_{i\in I}}y_i$ として，

$$\begin{aligned}B\restriction b&\cong(\prod_{i\in I}B\restriction y_i)\times B\restriction y\cong(\prod_{i\in I}B\restriction x_i)\times B\restriction y\\&\cong B\restriction a\times B\restriction y\end{aligned}$$

となるから，$B\restriction a$ は $B\restriction b$ の直積因子と同型になる．

b)： ⇒) $B\cong H^I$ で H は一様であるとする．このとき，例 9.4.1 での計算により，$(T(B),\leqslant)\cong(K,\leqslant)$ となる．ここに，

$$K=\{\alpha\ |\ \alpha \text{ は基数で，} \alpha=0 \text{ または } \alpha=1 \text{ または } sat(H)\leqslant\alpha\leqslant|I|\}$$

とする．

⇐) t を $T(B)$ の最小元以外の元のうちの最小のものとする．このとき，

$$D=\{x\in B\ |\ \tau(x)=t\}$$

は B の稠密な部分集合となり，$x\in D$ に対し $B\restriction x$ は一様になる．$P\subseteq D$ を B の分割とすれば，$x_0\in D$ に対し $H=B\restriction x_0$ は一様なブール代数となり，

$$B\cong\prod_{x\in P}B\restriction x\cong H^{|P|}$$

が成り立つ． ∎

$\{t_i\ |\ i\in I\}$ を $\boldsymbol{T}$ の部分集合とする．$t_i=\tau(B_i)$ として，

$$\sum_{i\in I}t_i=\tau(\prod_{i\in I}B_i)$$

と定義する．特に，$t=\tau(B)$，$s=\tau(C)$ に対し，

$$s+t=\tau(B\times C)$$

とする．また，基数 α と $t=\tau(B)\in \boldsymbol{T}$ に対し，同様に，

$$\alpha\cdot t=\tau(B^{\alpha})$$

と定義する．これらの演算に対し，いくつかの計算則が成り立つことがすぐに分かる．たとえば：$+$，$\sum$ は結合法則および可換法則を満たす．また，

$$\alpha\cdot(s+t)=\alpha\cdot s+\alpha\cdot t$$

$$(\alpha+\beta)\cdot t=\alpha\cdot t+\beta\cdot t$$

等が成り立つ．もちろん，$\{t_i \mid i\in I\}\subseteq T(B)$ または $t\in T(B)$ に対して $\sum_{i\in I} t_i \in T(B)$ あるいは $\alpha\cdot t\in T(B)$ となることは，一般には，いえない．

$t\in \boldsymbol{T}$ は，$s\in \boldsymbol{T}$ で $\alpha\cdot s=t$ となるものがあるとき，α で**割り切れる**といい，これを $\alpha|t$ で表わす．また，$t\in \boldsymbol{T}$ は，$s\in \boldsymbol{T}\setminus\{0_T\}$ で $\alpha\cdot s\leqslant t$ となるものがあるとき，α で**ほとんど割り切れる**という．

9.4.2 補題 a）$\aleph_0\leqslant\alpha$ で $\alpha|t$ なら，$\alpha\cdot t=t$ となる．

b）すべての $s\in \boldsymbol{T}$，$s\leqslant t$ が α でほとんど割り切れるとき，t は α で割り切れる．

c）B が硬い直積因子を持たないとき，$b\in B^+$，$\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{N}\setminus\{0\}$ として，$\tau(b)$ は $\boldsymbol{n}$ で割り切れる．

d）$s+t=t$ なら，$\omega\cdot s\leqslant t$ である．

証明 a)：$\alpha\cdot s=t$ なら，$\alpha\cdot t=\alpha\cdot(\alpha\cdot s)=(\alpha\cdot\alpha)\cdot s=\alpha\cdot s=t$ となる．

b)：すべての $s\in \boldsymbol{T}$，$s\leqslant t$ は α でほとんど割り切れるとして，$t=\tau(B)$ とする．$X=\{x_i|i\in I\}$ を，

$X\subseteq B^+$ で，X は互いに素

$x_i\in X$ に対し $\alpha|\tau(x_i)$ （たとえば，$\alpha\cdot s_i=\tau(x_i)$ とする）

という性質に関し極大になるようにとる．このとき，仮定により，X は B の分割となるから，

$$t=\tau(B)=\sum_{i\in I}\tau(x_i)=\sum_{i\in I}\alpha\cdot s_i=\alpha\cdot\sum_{i\in I}s_i$$

となる．

c)：$k\in \boldsymbol{N}$ を $\boldsymbol{n}\leqslant 2^k$ となるようにとる．b）により，$b\in B^+$ に対し，互いに素な $b(1),\cdots,b(2^k)\in(B\upharpoonright b)^+$ で $\tau(b(1))=\cdots=\tau(b(2^k))$ となるものが

存在することを示せばよい．$B\restriction b$ は硬くないから，補題 7.1.8 により，a_0, $a_1 \in B\restriction b$ で $0<a_0$, a_1, $a_0 \cdot a_1=0$, $\tau(a_0)=\tau(a_1)$ となるものがある．同様に，a_{00}, a_{01}, a_{10}, $a_{11} \in B\restriction b$ で

$$0<a_{00}, a_{01} \leqslant a_0, \quad 0<a_{10}, a_{11} \leqslant a_1$$

$$a_{00} \cdot a_{01}=a_{10} \cdot a_{11}=0$$

$$\tau(a_{00})=\tau(a_{01})=\tau(a_{10})=\tau(a_{11})$$

となるものがとれる．同様の操作を k 回行なうことにより，上のような $b(1)$, …, $b(2^k)$ が得られる．

d)：$t=\tau(B)$ とする．$t=s+t$ により，$c_0, b_0 \in B$ で

$$1=c_0 \dot{+} b_0, \quad \tau(c_0)=s, \quad \tau(b_0)=t$$

となるものがとれる．また，$t=s+t=t(b_0)$ により，$c_1, b_1 \in B$ で

$$b_0=c_1 \dot{+} b_1, \quad \tau(c_1)=s, \quad \tau(b_1)=t$$

となるものがとれる． 等々． この操作を繰り返して b_n, c_n, $n \in \omega$ を構成すれば,

$$\omega \cdot s=\tau(\dot{\sum_{n\in\omega}} c_n) \leqslant \tau(B)=t$$

が示せる． ▮

9.4.3 定理（ソロヴェイ） 任意の弱一様・完備ブール代数は，ある一様なブール代数の巾と同型である．

証明 B が定理の主張に対する反例であると仮定する．つまり，B は弱一様な完備ブール代数だが，一様なブール代数の巾とはならないとする．B は硬い直積因子を持たないから，補題 9.4.2 c）により，

$\delta=\min\{\kappa \mid \kappa$ は基数，$b \in B^+$ で $\tau(b)$ が κ で割り切れないようなものがある$\}$ は無限基数となる．δ の定義により

（1） $0<\alpha<\delta$, $b \in B^+$ なら $\alpha | \tau(b)$

が成り立つ．また，$c \in B^+$ で，すべての $0<x \leqslant c$ に対し，$\tau(x)$ が δ で割り切れないようなものがある： そうでなければ，$\{x \in B^+ \mid \tau(x)$ は δ でほとんど割り切れる$\}$ は B で稠密になるから，補題 9.4.2 b）と同様にすべての $\tau(b)$, $b \in B^+$ が δ で割り切れてしまうからである．$B\restriction c$ は B と共に定理の反例になるから，一般性を失うことなく

（2）　すべての $b \in B^{+}$ に対し，$\tau(b)$ は δ でほとんど割り切れることはない．

と仮定してよい．以下では，補題 9.4.1 a）により全順序集合になっている $(T(B), \leqslant)$ についての考察を行なう．$T(B)$ を T と略記することにする．

場合 1　$\aleph_1 \leqslant \delta$ となるとき：　$t \in T \setminus \{0_T\}$ として $t = 1_T$ を示す．これにより $T = \{0_T, 1_T\}$ は整列集合となり，B は定理の反例でなくなってしまう．

$$F = \{x_i \mid i \in I\}$$

を，$i \in I$ に対し $\tau(x_i) = t$ となる B^{+} の互いに素な部分集合で極大なものとする．（2）により，$\alpha = |I| < \delta$ である．$x = -\sum_{i \in I} x_i$ とすれば，F の極大性により，$\tau(x) < t$ となる．したがって，（基数の足し算で）$\beta = \alpha + 1$ として，

$$1_T = \alpha \cdot t + \tau(x) \leqslant \beta \cdot t$$

である．$\beta < \delta$ だが，$\beta \cdot t = t$ となることを示す：　$\gamma = \max(\beta, \aleph_0)$ とすると，$\delta \geqslant \aleph_1$ により，$\gamma < \delta$ である．したがって（1）により，$\gamma | t$ だから，補題 9.4.2 (a) により $\gamma \cdot t = t$ である．よって，

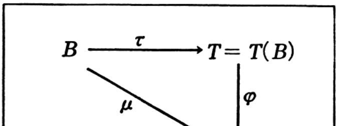
$$1_T \leqslant \beta \cdot t \leqslant \gamma \cdot t = t$$

となるが，これが示すべきことであった．

場合 2　$\delta = \aleph_0$ となるとき：　このときには，同型写像

$$\varphi : (T, \leqslant, +) \to ([0, 1], \leqslant, +)$$

で $\mu = \varphi \circ \tau$ が B 上の真に正な σ-加法的測度となるようなものが存在することが以下で示せる．B は，したがって，無原子的な測度ブール代数となるから，系 9.3.2 により，一様な直積因子 C を持ち，$\tau(C)$ は，$T(B)$ の最小元の次の元となる．ところが，補題 9.4.1 a）により $\leqslant$ は $T(B)$ 上の全順序だから，補題 9.4.1 b）により，B は定理の反例でなくなってしまう．



まず，（1），（2）および $\delta = \omega$ から容易に導かれる，$(T, \leqslant, +)$ のいくつかの性質を証明しよう．

（3）　$s, t \in T$ で $s + t = t$ なら，$s = 0_T$：

補題 9.4.2 d）により，$\omega \cdot s \leqslant t$ となり，（2）と $\delta = \omega$ により $s = 0_T$ となる

からである.

（4） $a, b \in B$ で $a < b$ なら，$\tau(a) < \tau(b)$：
$\tau(a) \leqslant \tau(b)$ となることは明らかだが，$t = \tau(b) = \tau(a)$ なら，（3）により，$s = \tau(b \cdot -a)$ として，$s + t = t$ だから $s = 0_T$ となり，$b \leqslant a$ となってしまうからである.

（5） $s, s', t \in T$ で $t + s = t + s' \in T$ なら，$s = s'$：
そうでなければ，たとえば $s < s'$，$s' = s + r$，$r > 0_T$ として，$s + t = s' + t = r + s + t$ となるが，これと（3）により，$r = 0_T$ となり，矛盾である.

（6） $n \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\}$，$t \in T$，$t = n \cdot s = n \cdot s'$ なら $s = s'$：
たとえば $s \leqslant s'$，$s' = s + p$ として $n \cdot s = n \cdot s' = n \cdot s + n \cdot p$ だから，（3）により $n \cdot p = 0_T$，したがって，$p = 0_T$ となり $s = s'$ が示せる.

（1）により，$t \in T$ と $n \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\}$ に対し $s \in T$ で $t = n \cdot s$ となるものが少なくとも1つは存在するが，（6）により，このような s は一意に決まるから，このような s を $\dfrac{1}{n} \cdot t$ と表わすことにする．$Q = \boldsymbol{Q} \cap [0, 1]$ として $q = \dfrac{k}{n} \in Q$ $(k, n \in \boldsymbol{N},\ n \neq 0)$ と $t \in T$ に対し，

$$q \cdot t = k \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot t \right)$$

と定義する.（6）により，$t \in T$，$q + q' \in Q$ に対し，

$$(q + q') \cdot t = q \cdot t + q' \cdot t$$
$$(q \cdot q') \cdot t = q \cdot (q' \cdot t)$$

等々が示せる.

（7） $0_T < t \in T$ なら $n \in \boldsymbol{N}$ で $0_T < \dfrac{1}{n+1} \cdot 1_T < t$ となるものが存在する：
$X \subseteq B$ を，X は互いに素で $x \in X$ に対し $\tau(x) = t$ である，という性質に関し極大なものとする．$\delta = \aleph_0$ および（2）により X は有限であるから $X = \{b_1, \cdots, b_n\}$ とする．$b = -(b_1 \dot{+} \cdots \dot{+} b_n)$ として X の極大性により，$\alpha = \tau(b) < t$ である．もし $t \leqslant \dfrac{1}{n+1} \cdot 1_T$ だったとすれば，$(n+1) \cdot t \leqslant 1_T = n \cdot t + \alpha$ だから，$t \leqslant \alpha$ となって矛盾する.

（8） $s, t \in T$ で $s < t$ なら，$q \in Q$ で $s < q \cdot 1_T < t$ となるものが存在する：
$d \in T$ で $t = s + d$ なら $d > 0_T$ である.（7）により，$\dfrac{1}{n} \cdot 1_T < d$ となる $n \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\}$ をとる．$\dfrac{0}{n} \cdot 1_T = 0_T \leqslant s < 1_T = \dfrac{n}{n} \cdot 1_T$ だから，$k < n$ で $\dfrac{k}{n} \cdot 1_T \leqslant s <$

$\dfrac{k+1}{n}\cdot 1_T$ となるものがある．$\dfrac{k+1}{n}\cdot 1_T<t$ である：そうでないとすれば，$\dfrac{k}{n}\cdot 1_T\leqslant s$ だから，$\dfrac{k}{n}\cdot 1_T+d'=s$ となる $d'\in T$ をとり，$t\leqslant\dfrac{k+1}{n}\cdot 1_T$ により，$t+d''=\dfrac{k+1}{n}\cdot 1_T$ となる $d''\in T$ をとれば，

$$\frac{k}{n}\cdot 1_T+d'+d+d''=\frac{k+1}{n}\cdot 1_T$$

となるから，$d'+d+d''=\dfrac{1}{n}\cdot 1_T$ となり，$d\leqslant\dfrac{1}{n}\cdot 1_T$ が成り立つが，これは n の選び方に矛盾する．

さて，写像

$$\varphi_0:\{q\cdot 1_T \mid q\in Q\}\to[0,\ 1]$$

を $\varphi_0(q\cdot 1_T)=q$ で定義すると，φ_0 は真に単調で $+$ に関する準同型となる．（8）により，$\{q\cdot 1_T \mid q\in Q\}$ は T で稠密である．したがって，φ_0 は T 上に単調性を保つように一意に拡張できるから，この拡張を φ とする．（8）により φ は1対1写像となる．

（9） $a,c\in B$，$a<c$，$\tau(a)=r<s<t=\tau(c)$ なら，$b\in B$ で $a<b<c$ かつ $\tau(b)=s$ となるものが存在する：

$r<s<t$ により，$r+p=s$，$s+q=t$ とすれば，$r+p+q=t$ だが，$d=c\cdot -a$ として，

$$r+\tau(d)=\tau(a)+\tau(d)=\tau(c)=t$$

となるから，（5）により，$p+q=\tau(d)$ である．$e\leqslant d$ を $t(e)=p$ となるようにとり，$b=a\dot{+}e$ とすれば，$a<b<c$ で

$$\tau(b)=\tau(a)+\tau(e)=r+p=s$$

となる．

φ は上射である：$Q=\{q_n \mid n\in\omega\}$ とする．（9）により，$c_n\in B$ を，$\tau(c_n)=q_n\cdot 1_T$ で $C_0=\{c_n \mid n\in\omega\}$ が B での連鎖となるように帰納的に選べる．C を，C_0 を含む極大な B での連鎖とする．C の $\varphi\circ\tau$ による像 D は Q を含み，τ は（4）により単射で，φ も単射だったから，D は C と順序同型になる．したがって，B が完備であることにより，D も全順序集合として完備になる．このことから，$D=[0,\ 1]$ となり，φ が上射であることが分かる．

更に，φ_0 が（T 上または $[0,\ 1]$ 上の）演算 $+$ に関する同型写像になって

いること，および $+$ が（T 上または $[0, 1]$ 上）2変数のそれぞれに関し単調になっていることから，φ は $(T, +, \leqslant)$ から $([0,1], +, \leqslant)$ への同型写像になっていることが分かる．

$$\mu : B \to [0, 1]$$

を $\mu = \varphi \circ \tau$ で定義して，(B, μ) が測度ブール代数になっていることを以下で示そう： まず，$\mu(0_B) = \varphi(\tau(0_B)) = \varphi(0_T) = 0$ となる．同様に $\mu(1_B) = 1$ である．$b > 0_B$ なら $\tau(b) > 0_T$ だが，φ は単射だから，$\mu(b) = \varphi(\tau(b)) \neq 0$ となる．μ は有限加法的である： $b = b_1 \dot{+} \cdots \dot{+} b_n$ なら，$\tau(b) = \tau(b_1) + \cdots + \tau(b_n)$ だから，φ が演算 $+$ を保存することにより，$\mu(b) = \mu(b_1) + \cdots + \mu(b_n)$ となるからである．更に，φ が単射であることから，

$$(10) \quad \tau(b) \leqslant \tau(c) \Longleftrightarrow \mu(b) \leqslant \mu(c)$$
$$\tau(b) = \tau(c) \Longleftrightarrow \mu(b) = \mu(c)$$

が成り立つ．

μ は σ-加法的である(この主張により証明が完了する)： $a = \dot{\sum}_{n \in \omega} a_n$ を B の元とする．$\mu(a) = \sum_{n \in \omega} \mu(a_n)$ が示すべきことである．μ が有限加法的であることから，$\sum_{n \in \omega} \mu(a_n) \leqslant \mu(a)$ は明らかである．

$$\sum_{n \in \omega} \mu(a_n) < q < \mu(a)$$

となる $q \in [0, 1]$ が存在すると仮定して，これから矛盾が導かれることを示そう： μ は上射だから，$c \in B$ で $q = \mu(c)$ となるものをとる．このとき，互いに素な $b_n \in B$ で

$$\dot{\sum_{n \in \omega}} b_n \leqslant c, \quad \mu(b_n) = \mu(a_n)$$

となるものが帰納的に選べる： $\mu(a_0) \leqslant q = \mu(c)$ だから $\tau(a_0) \leqslant \tau(c)$ となり，(9) により，$b_0 \leqslant c$ で $\tau(b_0) = \tau(a_0)$ つまり $\mu(b_0) = \mu(a_0)$ となるものがある．$\mu(a_1) \leqslant q - \mu(a_0) = q - \mu(b_0) = \mu(c \cdot -b_0)$ だから，再び (9) により $b_1 \leqslant c \cdot -b_0$ で $\tau(b_1) = \tau(a_1)$ つまり $\mu(b_1) = \mu(a_1)$ となるものがある．…等々と選んでいけばよい．

$$b = \dot{\sum_{n \in \omega}} b_n$$

とする．このとき，

$$\tau(a) = \sum_{n \in \omega} \tau(a_n) \qquad (a = \dot{\sum_{n \in \omega}} a_n \text{ だから})$$

$$=\sum_{n\in\omega}\tau(b_n)$$

$$=\tau(b) \qquad (b=\dot{\sum} b_n \text{ だから})$$

$$\leqslant\tau(c) \qquad (b\leqslant c \text{ だから})$$

となるから，$\mu(a)\leqslant\mu(c)=q$ だが，これは矛盾である．　■

定理 9.4.3 から直ちに次の系が得られる．

9.4.4 系　X を任意の位相空間として，I を無限集合とする．このとき，完備ブール代数 $C=RO(X^I)$ は一様になる．

証明　例 9.4.2 により，C は弱一様である．したがって，定理 9.4.3 により，ある一様な完備ブール代数 H と $\kappa<sat(C)$ となる基数 κ があって $C\cong H^\kappa$ となる．$\kappa<sat(H)$ を示そう．このことと，例 9.3.1 により，$C\cong H^\kappa\cong H$ がいえる．$v\in C$ を $C\upharpoonright v\cong H$ になるようにとり，例 9.4.2 でと同様に基本開集合 $c\leqslant v$ をとる．$\kappa<sat(C)$ により，κ 個の互いに素な空でない X^I の開部分集合が存在するが，c は

$$c\cong\prod_{j\in J_0}V_j\times X^I$$

という形をしているから，κ 個の空でない互いに素な c の開部分集合が存在することが分かる．したがって，$\kappa<sat(H)$ である．　■

すべてのブール代数 A は，完備で一様なブール代数 C に完備に埋込まれる——たとえば，クリプケが示したように，$\kappa=\max\{|A|,\aleph_0\}$ として，ガイフマン・ハレス・ソロヴェイの定理で用いられた $RO(\kappa^\omega)$ を C としてとればよい．しかし，ここで $c(RO(\kappa^\omega))=\kappa$ となるが，これは，一般には，$c(A)$ よりはるかに大きな基数となる．A の完備で一様なブール代数 C への完備な埋込みは，系 9.4.4 により，以下のように構成することもできる：X を A の双対空間として s を A から $B=Clop(X)$ の上へのストーン写像とする．$I=\boldsymbol{N}$ として，各 $i\in I$ に対し B_i を B の同型なコピーとし，e_0 を B と B_0 を同一視したときの B_i の補積 $D=\bigoplus_{i\in I}B_i$ への埋込みとする．7.2 により D の双対空間は X^I になっている．系 9.4.4 により，$C=RO(X^I)$ は一様になる．$Clop(X^I)\cong D$ だから，C は D の完備化になっており，完備な埋込み

$e: D \to C$ が存在する.

$$A \xrightarrow{s} Clop(X) = B \xrightarrow{e_0} \bigoplus_{i \in I} B_i = D \xrightarrow{e} C$$

この構成では，明らかに $c(A)=c(B)$ となり，$e(D)$ が C の稠密な部分ブール代数であることから，$c(C)=c(D)$ が成り立つ．一方，無限組合せ論での手法を用いることにより，

$$c(D) \leqslant 2^{c(B)}$$

が示せるから，

$$c(C) \leqslant 2^{c(A)}$$

となることが分かる（演習問題 7.3.1 を参照).

A が ccc を満たすときには，B も ccc を満たすから，マルティンの公理と $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ を仮定すれば，D および C も ccc を満たす．この結果は，しかしながら，次の定理により，本質的にはこれ以上改良できない：

9.4.5 定理（ステファネック・バルツァー） $V=L$ を仮定する．このとき，ccc を満たすブール代数 A で，どの ccc を満たす一様な完備ブール代数にも埋込めないようなものが存在する． ▮

9.4 の演習問題

9.4.1 自明でない完備ブール代数 B に対し，B の**中心**を

$$C(B) = \{x \in B \mid \text{すべての } B \text{ の自己同型写像 } g \text{ に対し } g(x)=x\}$$

と定義する．$C(B)$ は B の完備部分ブール代数となる．このとき，以下を示せ．

a）$c \in C(B)$ なら，$C(B \upharpoonright c) = C(B) \upharpoonright c$

b）$x \in B$ が $C(B)$ の元となるのは，$B \upharpoonright x$ と $B \upharpoonright -x$ が完全に異なるとき，かつこのときに限る

c）B_i, $i \in I$ が互いに完全に異なるとき，$C(\prod_{i \in I} B_i) \cong \prod_{i \in I} C(B_i)$ となる．

d）B が弱一様となるのは，$C(B) = \mathbf{2}$ となるとき，かつ，そのときに限る．

e）B が一様な因子の直積となるのは，$C(B)$ が原子的であるとき，かつそのときに限る．

演習問題の略解

1.1.1 略.

1.1.2 $x\in P$ に対し，$b_x=\{p\in P \mid p\leqslant x\}$ とする．$b_x\subseteq P$ だから，$Q=\{b_x \mid x\in P\}\subseteq P(P)$ となるが，$f:P\to Q\,;x\longmapsto b_x$ により，$(P,\leqslant)$ は $(Q,\subseteq)$ と同型になる．

1.1.3 K を P の任意の連鎖とし，$Q=\{L\subseteq P \mid K\subseteq L,\ L$ は P の連鎖$\}$ とする．$X\subseteq Q$ が $\subseteq$ に関する Q での連鎖なら，$\bigcup X$ は P の連鎖となり，X の $\subseteq$ に関する上界となるから，ツォルンの補題により，Q の $\subseteq$ に関する極大元が存在する．これが求めるものである．反鎖についても同様である．

1.1.4 P が無限だと仮定して矛盾を導く，P が極小元を持たないとすれば，P での連鎖が帰納的に構成できてしまうから，P は極小元を持つ．同様に，任意の $x\in P$ に対し，極小元 $m\in P$ で $m\leqslant x$ となるものが存在することも示せる．一方，P の極小元の集合は反鎖になるから，P は有限個の極小元しか持たない．したがって，引き出し論法により，P の極小元 m_0 で $P_1=\{x\in P|m_0<x\}$ が無限になるものがある．同様に，P_1 の極小元 m_1 で $P_2=\{x\in P_1|m_1<x\}$ が無限になるものがあるが，これを繰り返せば，P の連鎖 $m_0<m_1<m_2\cdots$ が構成できてしまう．

1.2.1 a) ⇒ b)：明らかである．b) ⇒ c)：$X\subseteq P$ を開集合とする．$y\in P\backslash X$ とすれば，b_y は y を含む最小の開集合だから，ハウスドルフ性により，$x\notin b_y$ がすべての $x\in X$ に対しいえる．したがって，$b_y\subseteq P\backslash X$ である．c) ⇒ d)：もし $x\leqslant y$ で $x\neq y$ となるものがあれば，$b_y\subsetneqq b_x$ だから，b_y が閉集合なら，$b_x\backslash b_y\subsetneqq b_x$ は x を含む開集合となり，矛盾である．d) ⇒ a)：明らかである．

1.2.2 $(Q,\leqslant)$ が半順序集合なら，異なる $x,y\in Q$ に対し，$x\notin b_y$ か $y\notin b_x$ のいずれかが成り立つから，$(Q,\mathcal{O})$ は T_0-空間となる．$(Q,\leqslant)$ が半順序集合でないなら，$x,y\in Q$ で $x\leqslant y,\ y\leqslant x,\ x\neq y$ となるものがあるが，このとき，$b_x=b_y$ となり，x,y の片方のみを含む開集合は存在しない．

1.2.3 擬順序に関する順序位相 $\mathcal{O}$ が共通部分に関し閉じていることは定義から明らかである．逆に，$\mathcal{O}$ が共通部分に関し閉じているときには，$x,y\in X$ に対し $x\leqslant y$ を $\bigcap\{O\in\mathcal{O}|x\in O\}\supseteq\bigcap\{O\in\mathcal{O}|y\in O\}$ で定義すれば，$\mathcal{O}=\mathcal{O}_{\leqslant}$ となる．

1.3.1 略.

1.3.2 $f,g\in V$ に対し $h_1(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，$h_2(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ で定義される関数 h_1，h_2 が f,g の上限，および下限となる．たとえば，V の元の上昇列 $f_1,f_2,\cdots$ で，その極限が不連続な階段関数となるものをとれば，$\{f_1,f_2\cdots\}$ は V で上限を持たないから，V は完備でない．V の元 f が補元を持つのは，$f(x)$ が恒等的に 0，または 1 となるときに限る．

1.3.3 a) 分配束では，$z\leqslant x$ なら，$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z=x\cdot y+z$ となる．b)

図で $a\cdot(b+c)=a\cdot 1=1$ だが，$a\cdot b+b\cdot c=0+0=0$ となるから，この束は分配束ではない．c）図で $b\leqslant a$，$a\cdot(b+c)=a\cdot 1=a$ となるが，$a\cdot b+c=b+c=1$ である．d）任意の $X\subseteq N$ に対し，$\bigcap X$ が X の $\subseteq$ に関する下限となり，$\bigcup X$ から生成された G の正規部分群 $[\bigcup X]$ が X の上限となる．したがって，$(N,\subseteq)$ は完備束である．$H, H', H''\in N$ で $H''\subseteq H$ となるとき，$H\cdot H'+H''=[(H\bigcap H')\bigcup H'']=[H\bigcap(H'\bigcup H'')]=H\bigcap[H'\bigcup H'']=N\cdot(H'+H'')$ が成り立つ．

1.4.1 a) ⇒ b)：定理 1.4.2 による．b) ⇒ c)：$b=\prod^L\{x\in B\,|\,l\leqslant x\}$ が $l\leqslant b$ となる $b\in B$ のうち最小のものになる．c) ⇒ a)：$l\in L$ に対し $\bar{l}$ を $l\leqslant b$ となる $b\in B$ のうち最小のものと定義すれば，$^-$ は閉包演算子となり，B はこの $^-$ に関し閉じた元の全体となる．

1.4.2 任意の $X\subseteq B$ に対し，$p(\sum^L e[X])$ が X の上限となる．

1.4.3 $M, N\in P(L)$ に対し，$M\subseteq N$ なら，$u(M)\supseteq u(N)$ だから，$l(u(M))\subseteq l(u(N))$ となる．$x\in M$ なら，x は M の任意の上界より小さいから，$x\in l(u(M))$ となり，(＊) $M\subseteq l(u(M))$ が成り立つ．同様に，(＊＊) $M\subseteq u(l(M))$ もいえる．(＊) により，$u(M)\supseteq u(l(u(M)))$ だが，(＊＊) を $u(M)$ に用いて，$u(M)\subseteq u(l(u(M)))$ となるから，$u(M)=u(l(u(M)))$ が成り立ち，$l(u(M))=l(u(l(u(M))))$ を得る．以上で $^-$ が閉包演算子であることが示せた．$a, b\in L$ で $a\neq b$ のとき，たとえば $a\not\leqslant b$ として，$a\notin l(\{a\})$ だから，$l(\{a\})\not\supseteq l(\{b\})$，したがって $u(l(\{a\}))\not\subseteq u(l(\{b\}))$ となり，$e(a)\neq e(b)$ である．$a, b\in L$ に対し，$u(\{a+b\})=u(\{a\})\cap u(\{b\})$ となるから，$l(u(\{a+b\}))=l(u(\{a\})\cap u(\{b\}))=l(u(\{a\}))\cup l(u(\{b\}))$，したがって，$e(a+b)=e(a)\cup e(b)$ が成り立つ．・に関しても同様である．

2.1.1 $Intalg(X)$ のすべての元が標準表現によって一意に表わされることは容易に示せる．$a, b\in Intalg(X)$ で，$a=[u_1, v_1)\cup\cdots\cup[u_n, v_n)$，$b=[u'_1, v'_1)\cup\cdots\cup[u'_m, v'_m)$ を標準表現とするとき，$a\cup b\in Intalg(X)$ は $Intalg(X)$ の定義から明らかだが，$a\cap b=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}[u_i, v_i)\cap[u_j, v_j)$ で，各 i, j に対し，$[u_i, v_i)\cap[u_j, v_j)$ は $Intalg(X)$ の元になるから，$a\cap b\in Intalg(X)$ となる．また $X\setminus a=[0_X, u_1)\cup[v_1, u_2)\cup\cdots\cup[v_n, \infty)$ だから，$X\setminus a\in Intalg(X)$ である．

2.1.2 $f: A_n\to P(\{0, \cdots, n-1\})$，$X\longmapsto X\cap\{0, \cdots, n-1\}$ が同型写像となる．$n=lm$ で $X\in A_n$ なら，$X+n=X$ となることが，l に関する帰納法によって示せるから，$A_m\subseteq A_n$ である．$X, Y\in A$，たとえば，$X\in A_m$，$Y\in A_n$ とするとき，k を n と m の公倍数とすれば，$X, Y\in A_k$ となり，$X\cap Y$，$X\cup Y$，$\boldsymbol{Z}\setminus X\in A_k\subseteq A$ である．

2.1.3 a）$\sum^A M$ は M の B での上界となるが，$\sum^A M$ が M の B での上限でなければ，M の C での上限でもなくなってしまうから，$\sum^A M=\sum^B M$ である．b）たとえば，$a, b\in\boldsymbol{R}$，$a\leqslant b$ に対し，$[a, b)$ で実数の半開区間を表わすことにして，

$A=\boldsymbol{R}$ の部分集合で $[q_1, r_1)\cup\cdots\cup[q_n, r_n)$，$n\in\boldsymbol{N}, q_i, r_i\in(\boldsymbol{Q}\setminus(-\infty, 1])\cup\{0\}$ の形を

しているもの全体

$B=\boldsymbol{R}$ の部分集合で $[q_1, r_1)\cup\cdots\cup[q_n, r_n)$, $n\in\boldsymbol{N}, q_i, r_i\in(\boldsymbol{Q}\backslash(-\infty, 1]\cup\{0, \sqrt{2}\}$ の形をしているもの全体

$C=Intalg([0, \infty))$

$X=\{[q, r) \mid q, r\subseteq\boldsymbol{Q},\ 1<q\leqslant r<\sqrt{2}$ とすればよい.

2.1.4 $x, y\in C$ に対し, L が分配束であることから, $-x\cdot -y$, $-x+-y$ がそれぞれ $x+y$, $x\cdot y$ の補元になる. よって $x+y$, $x\cdot y\in C$ である. したがって, C は L の部分束となり, 分配束であることが分かるが, L での補元は, 明らかに C での補元でもあるから, C は $+$, $\cdot$ に関してブール代数となる.

2.2.1 $\chi_x: A\to\boldsymbol{2}$ が準同型なら, $a, b\in A$ に対し, $a\in x$ かつ $a\leqslant b\Longleftrightarrow\chi_x(a)=1$ かつ $a\leqslant b\Rightarrow\chi_x(b)=1\Longleftrightarrow b\in x$, $a, b\in x\Longleftrightarrow\chi_x(a)=\chi_x(b)=1\Rightarrow\chi_x(a\cdot b)=1\Longleftrightarrow a\cdot b\in x$ となるから, x は A 上のフィルターである. 更に, $a\notin x\Longleftrightarrow\chi_x(a)=0\Longleftrightarrow\chi_x(-a)=1\Longleftrightarrow -a\in x$ となるから, x は超フィルターである. 逆に, x を超フィルターとするとき, $\chi_x: A\to\boldsymbol{2}$ が準同型写像となることも同様に示せる.

2.2.2 たとえば, A を集合ブール代数 $\{X\subseteq\boldsymbol{Q}|$ ある $q\in\boldsymbol{Q}$, $q<\sqrt{2}$ に対し, $X\cap[q, \infty)\in Intalg(\boldsymbol{Q}\cap[q, \infty))\}$ とすればよい.

2.2.3 $q=\{u\in P(Y) \mid y\in u\}$ は $P(Y)$ 上の超フィルターとなる. $p=\{a\in A \mid y\in f(a)\}$ は, q の f による逆像 $f^{-1}[q]$ となるが, 超フィルターの準同型による逆像は再び超フィルターになることが示せるから, p は超フィルターであることが分かる. $Y\subseteq X$ として, $f: A\to P(Y)$; $a\longmapsto\{y\in Y \mid a\in y\}$ が準同型になることは, 定理 2.2.7 でと同様に示せる. f が単射となるのは, 異なる $a, b\in A$ に対し, $-a\cdot b\in y$ または, $a\cdot -b\in y$ となる $y\in Y$ が存在するときである.

2.2.4 略.

2.2.5 すべての有限な $M_0\subseteq M$, $N_0\subseteq N$ に対し ($\sum M_0\nleqslant\prod N_0$ が成り立つ$\Longleftrightarrow M)\cap -N$ は有限交叉性を持つ $\Longleftrightarrow M\cup -N$ を含む超フィルター x が存在する (補題 2.2.6) $\Longleftrightarrow M\subseteq x$, $N\subseteq A\backslash x$ となる超フィルター x が存在する.

2.2.6 $\{s_i \mid i\in I\}$ は, 有限交叉性を持つから, 補題 2.2.6 により, この集合を含む超フィルター x が存在する. 補題 2.2.5 により, x は素フィルターだから, 各 $i\in I$ に対し $a_i\in x$ となる $a_i\in e_i$ が存在する. $\{a_i \mid i\in I\}$ は x の部分集合だから, 有限交叉性を持つ.

2.3.1 $M_0\subseteq M$ が有限で $\sum^A M=\sum^A M_0$ となれば, s は準同型写像だから, $\bigcup s[M]\subseteq s(\sum^A M)=s(\sum^A M_0)=\bigcup s[M_0]\subseteq\bigcup s[M]$ となる. 一方, すべての有限な $M_0\subseteq M$ に対し $\sum^A M\neq\sum^A M_0$ なら, $\{-m|m\in M\}\cup\{\sum^A M\}$ は有限交叉性を持つ. したがって, 補題 2.2.6 により, この集合を含む超フィルター x が存在する. $\sum^A M\in x$ より, $x\in s(\sum^A M)$ だが, すべての $m\in M$ に対し, $-m\in x$ だから $x\notin\bigcup s[M]$ となり, $\bigcup s[M]\subsetneq s(\sum^A M)$ である.

2.3.2 s が既約で完全であることは，s の定義から明らかである．演習問題 2.2.3 により，$\{a\in A\,|\,y\in e(a)\}\in X$ となるから，$\varphi: Y\to X$ を $y\longmapsto\{a\in A\,|\,y\in e(a)\}$ により定義する．e は既約だから，φ は1対1となり，e は完全だから φ は X の上への写像となる．$a\in A$ とすれば，$f\circ s(a)=\varphi^{-1}[s(a)]=\{y\in Y\,|\,\varphi(y)\in s(a)\}=\{y\in Y\,|\,a\in\varphi(y)\}=e(a)$ である．$\varphi': Y\to X$ が，任意の $a\in A$ に対し，$\varphi'^{-1}[s(a)]=e(a)$ を満たすなら，$s(a)=\varphi'[e(a)]$ となるから，任意の $y\in Y$, $a\in A$ に対し，$y\in e(a)\Longleftrightarrow\varphi'(y)\in s(a)\Longleftrightarrow a\in\varphi'(y)$ が成り立ち，$\varphi'(y)=\{a\in A\,|\,y\in e(a)\}=\varphi(y)$ がいえて，$\varphi=\varphi'$ が示せる．

2.4.1 a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) は明らかである．d) $\Rightarrow$ a)：一般性を失うことなく，P はブール代数 B の稠密な部分集合としてよい．$x\in P$ を任意にとり，$y\in P$ が $y\notin b_x$ を満たすとする．このとき，$z\in P$ で $z\leqslant y$, $b_x\cap b_z=\varnothing$ となるものが存在することを示せばよい．$y\not\leqslant x$ だから，$y\cdot -x>0$ である．P は B で稠密だから，$z\in P$ で $z<y\cdot -x$ となるものがあるが，この z が求めるものである．

2.4.2 演習問題 2.4.1 の c) $\Rightarrow$ b) により，$e: P\to RO(P)$, $x\longmapsto b_x$ は P から $RO(P)$ の稠密な部分集合への順序同型だから，補題 2.4.5 により，e の拡張で B から $RO(P)$ への同型写像となるものがある．

2.4.3 a) $v_i<u_{i+1}$, $1\leqslant i<n$ だから，$e(a)\in RO([0,1))$ である．e が準同型となることは明らかである．$RO([0,1))$ の0と異なる任意の元は，ある開区間を含むから，e は稠密である．更に，$RO([0,1))$ は完備ブール代数だから，$(e, R([0,1)))$ は，$Intalg([0,1))$ の完備化であることが分かる．b) a) と同様に，$RO([0,1)\cap\boldsymbol{Q})$ は $Intalg([0,1)\cap\boldsymbol{Q})$ の完備化であることが示せるが，$a\in Intalg([0,1)\cap\boldsymbol{Q})$, $a=[q_1,r_1)_{\boldsymbol{Q}}\cup\cdots\cup[q_n,r_n)_{\boldsymbol{Q}}$ に対し，$f(a)=[q_1,r_1)_{\boldsymbol{R}}\cup\cdots\cup[q_n,r_n)_{\boldsymbol{R}}\in Intalg([0,1))$ とすれば，f は $Intalg([0,1)\cap\boldsymbol{Q})$ から $Intalg([0,1))$ の稠密な部分集合への順序同型となるから，補題 2.4.5 により，$RO([0,1)\cap\boldsymbol{Q})\cong RO([0,1))$ が示せる．

3.1.1 $X=\{a_1\cdot x_1+\cdots+a_n\cdot x_n\,|\,a_1,\cdots,a_n\in A\}$ とする $X\subseteq A(x_1,\cdots,x_n)$ および $x_1,\cdots,x_n\in X$ は明らかである．$a\in A$ に対し，$a\cdot x_1+\cdots+a\cdot x_n=a\cdot(x_1+\cdots+x_n)=a\cdot 1=a$ となるから，$A\subseteq X$ である．X が $+$ に関し閉じていることは明らかだが，$-(a_1\cdot x_1+\cdots+a_n\cdot x_n)=-a_1\cdot x_1+\cdots+-a_n\cdot x_n$ となることが示せるから，X は $-$ に関しても閉じている．

3.1.2 b) B を $P(I)$ の部分ブール代数とする．B は有限だから，$At(B)$ が B の生成系になる．$i,j\in I$ に対し，$i\sim j\Longleftrightarrow$ すべての $b\in At(B)$ に対し，$(i\in b\Longleftrightarrow j\in b)$ と定義すれば，$At(B)=At(B_\sim)$ となるから，$B=B_\sim$ である．

3.1.3 $\{\{i\}\,|\,i\in I\}$ は $FC(I)$ の互いに素な元からなる生成系である．逆に，B が互いに素な元からなる生成系 X を持つとき．B のすべての元 b は，ある $x_1,\cdots,x_n\in X$ によって，$b=x_1+\cdots+x_n$, または $b=-(x_1+\cdots+x_n)$ と一意に表わせることが示せる

から，これに $\{x_1, \cdots, x_n\}$，または $X\backslash\{x_1\cdots x_n\}$ を対応させる写像は，B から $FC(X)$ への同型写像となる．

3.1.4 $f: I\to\{0,1\}$ をすべての $1\leqslant i\leqslant n$ に対し $f(i)=\max\{e_i, 0\}$ となるものとすれば，$f\in e_1\cdot u_1\cdot\cdots\cdot e_n\cdot u_n$ である．

3.1.5 $M\subseteq C$, $|M|\leqslant\kappa$ とする．$X\subseteq A'\subseteq B$ で A' が B の κ-完備部分ブール代数なら，$M\subseteq A'$ だから $\prod^B M$, $\sum^B M\in A'$ である．したがって，$\prod^B M$, $\sum^B M\in C$ となる．C が $-$ に関して閉じていることも同様にして示せるから，C は B の X を含む κ-完備部分ブール代数であることが分かる．最小性は C の定義より明らかである．

3.2.1 $y_1+\cdots+y_n=1$ で (1), (2) が成り立つなら，補題 3.2.1 により，$g: A(x_1, \cdots, x_n)\to B$, $a_1\cdot x_1+\cdots+a_n\cdot x_n\longmapsto f(a_1)\cdot x_1+\cdots+f(a_n)\cdot x_n$ は準同型写像となり，$f\subseteq g$, $g(x_i)=y_i$ を満たす．逆に，$g: A(x_1, \cdots, x_n)\to B$ が $f\subseteq g$, $g(x_i)=y_i$ を満たすなら，$y_1+\cdots+y_n=1$ となり，(1), (2) が成り立つことは明らかである．

3.2.2 補題 3.2.1 を D, $[D]$, f, $[E]$ に適用して，準同型写像 $h: [D]\to[E]$, $f\subseteq h$ を得る．同様に $h': [E]\to[D]$, $f^{-1}\subseteq h'$ が得られるが，これらは互いに逆写像となるから，h は同型写像であることが分かる．定理 3.2.3 により準同型写像 $g: A\to B$, $h\subseteq g$ が得られるが，h が $[D]$ から $[E]$ への同型写像であることと，$[D]$, $[E]$ がそれぞれ A と B で稠密であることから，g は同型写像になっていることが分かる．

3.2.3 a) $a\in A^*$ に対し，$M=A^*\upharpoonright a\cap A$, $N=A^*\upharpoonright -a\cap A$ とする．このとき，$f(a)\geqslant\sum^B e[M]$, $f(-a)\geqslant\sum^B e[N]$ で，e の完備性により，$\sum^B e[M\cup N]=1$ となるから，$f(a)=\sum^B e[M]$ が成り立ち，f はこの等式により一意に決まる．b) 任意の $\{a_i|i\in I\}\subseteq A^*$ に対し $M_i=A^*\upharpoonright a_i\cap A$ とする．$a=\sum_{i\in I}^A a_i$, $M=A^*\upharpoonright a\cap A$ とすれば，$M=\bigcup_{i\in I} M_i$ となるから，$f(a)=\sum^B e[M]=\sum_{i\in I}^B \sum^B e[M_i]=\sum_{i\in I}^B f(a_i)$ が成り立つ．c) $f[A^*]$ は $e[A]$ を含み，A^* と f が完備であることから，B での上限と下限に関して閉じている．したがって，$B=f[A^*]$ である．また，定理 3.2.3 の後の注意により，f は単射でもある．

3.2.4 $C=\{a\in A|f(a)=g(a)\}$ は，X を含む A の部分ブール代数だが，$M\subseteq C$ で $|M|\leqslant\kappa$ なら，$f(\sum^A M)=\sum^B f[M]=\sum^B g[M]=g(\sum^B M)$ となるから，$\sum^A M\in C$ である．したがって，C は A の κ-完備部分ブール代数となり，A が X から κ-完備に生成されたブール代数であることから，$C=A$ を得る．

3.3.1 $\mathrm{Ker}\, f\subseteq\mathrm{Ker}\, f'$ なら，$f(a)\longmapsto f'(a)$, $a\in A$ によって B から B' への写像 g が定義できるが，明らかに $g\circ f=f'$ が成り立つ．逆に，$g\circ f=f'$ となる準同型 $g: B\to B'$ が存在すれば，$\mathrm{Ker}\, f'=\mathrm{Ker}(g\circ f)\supseteq\mathrm{Ker}\, f$ である．

3.3.2 a) $I, J\in Id(A)$ に対し．$I+J=\{i+j|i\in I,\ j\ni J\}$ と定義すれば，$I+J\in Id(A)$ で，$I+J$, $I\cap J$ が，I, J の上限，および下限となる．$X\subseteq Id(A)$ に対し，$\bigcap X\in Id(A)$ がその下限となるから，補題 1.4.1 により $Id(A)$ は完備束である．$I, J, K\in Id(A)$ に対し，$x\in I\cap(J+K)\Longleftrightarrow x\in I$ かつ（ある $j\in J$, $k\in K$ に対し $x=j+k$）$\Longleftrightarrow$

ある $j\in I\cap J$, $k\in I\cap K$ に対し $x=j+k \Longleftrightarrow x\in(I\cap J)+(I\cap K)$ だから, $Id(A)$ は分配的である. b) π を A から A/J への自然な写像として, $\{I\in Id(A)|J\subseteq I\}\to Id(A/J)$, $I\longmapsto\{\pi(a)|a\in I\}$ は同型写像になる.

3.3.3 a) $\{a\in A|$ すべての $b\in I$ に対し $a\cdot b=0\}$ が I の擬補元になる. b) $(a]^*=(-a]$ だから $(a]^{**}=(-a]^*=(--a]=(a]$. c) $I\in R$, $I\neq\emptyset$ とするとき, $a\in I$ をとれば $e(a)\subseteq I$ となる.

3.3.4 a) $\pi: A\to A/I$ が κ-完備なら, $X\subseteq I$, $|X|\leqslant\kappa$ に対し, $\pi(\sum^A X)=\sum^{A/I}\pi[X]=0$ となるから, $\sum^A X\in I$ である. 一方, I が κ-完備でないなら, $Y\subseteq I$ で $|Y|\leqslant\kappa$, $\sum^A Y\notin I$ となるものがあるが, $\sum^{A/I}\pi[Y]=0_{A/I}\neq\pi(\sum^A Y)$ だから, π は κ-完備でない. b) $X\subseteq A/I$, $|X|\leqslant\kappa$ に対し, $\pi(\sum^A\pi^{-1}[X])$ がその上限となる.

3.3.5 a) A/I の 0 と異なる元 x は, ある無限集合 $X\subseteq \boldsymbol{N}$ によって $x=\pi(X)$ と表わされるが, $Y\subseteq X$ を Y と $X\backslash Y$ が共に無限集合になるようにとると, $0<\pi(Y)<\pi(X)$ となる. b) $x_i\in A/I$, $i\in\boldsymbol{N}$, $x_0>x_1>x_2\cdots$, $x_i=\pi(X_i)$ とする. $n\in\boldsymbol{N}$ に対し, $\bigcap_{i\leqslant n}X_i$ は無限集合だから, $k_n\in\boldsymbol{N}$ を $k_n\in\bigcap_{i\in n}X_i\backslash\{0,\cdots,k_{n-1}\}$ によって帰納的に定義できる. $X=\{k_n|n\in\boldsymbol{N}\}$ として, $x=\pi(X)$ は $x_i, i\in\boldsymbol{N}$ の下界となるが, X は無限集合だから $x\neq0$ である.

4.1.1 $s(a)\to St(A\upharpoonright a)$, $x\longmapsto x\upharpoonright a=\{b\in x\mid b\leqslant a\}$ が位相同型写像となる.

4.1.2 $M\subseteq A$ で $a=\sum^A M$ とする. $s(a)=\sum^{P(X)}s[M]=\bigcup s[M]$ なら, $s(a)$ はコンパクトだから, 有限個の $m_1,\cdots,m_n\in M$ で $s(a)=s(m_1)\cup\cdots\cup s(m_n)=s(m_1+\cdots+m_n)$ となるものがある.

4.1.3 a) $s(a)$ が $\{x\}$ の形をしていれば, $x=[a)$ となるから, x が超フィルターであることにより, a は原子元である. $s(a)$ が異なる 2 点を含めば, X がハウスドルフ空間であることから, $b\in A$ で $\emptyset\subsetneqq s(b)\subsetneqq s(a)$, したがって, $0<b<a$ となるものがある. b) a) より明らかである.

4.1.4 a) 補題 3.3.1 により, $p\in St(A)$ なら, $\chi_p\in Y$ である. f が 1 対 1 写像であることは明らかだが, 補題 3.3.2 の双対命題により, f は上射でもある. 更に, $f(s(a))=\{y\in Y|y(a)=1\}$, $(a\in A)$ は Y の開基を与えるから, f は位相同型である. $x\in\boldsymbol{2}^A\backslash Y$ なら, たとえば, $a,b\in A$ で, $1=x(a+b)\neq x(a)+x(b)=0$ となるものがあるが, $\{y\in\boldsymbol{2}^A\mid y(a+b)=1,\ y(a)=y(b)=0\}\subseteq\boldsymbol{2}^A\backslash Y$ は x を含む開集合となり, x は Y の外点である. したがって, Y は閉集合である. b) $g(u+v)=\chi_{u\cup v}=\chi_u+\chi_v$, $g(-u)=\chi_{-u}=-\chi_u$ により, g は準同型写像である. $u,v\in Clop(X)$ $u\neq v$ なら, $\chi_u\neq\chi_v$ だから, g は単射である. 更に, 任意の $x\in Z$ に対し, x は連続だから, $u=x^{-1}[\{1\}]$ は開閉集合となり, $\chi_u=x$ だから, g は上射である.

4.1.5 $p=\{N\subseteq M\mid N$ は補有限$\}$ は A 上の超フィルターとなるが, $S(A)=\{[\{m\})|m\in M\}\cup\{p\}$ であることが分かる. したがって, $S(A)\backslash\{p\}$ は離散空間となるから,

M と同一視できる.

4.2.1 a) S を1点からなるブール空間 $\{0\}$ とする. $x, y \in X$, $x \neq y$, $\varphi(x)=\varphi(y)$ のとき, $\alpha(0)=x, \alpha'(0)=y$ で α, α' を定義する. α, α' は $\{0\}$ から X への連続写像で $\alpha \neq \alpha'$ だが, $\varphi \circ \alpha = \varphi \circ \alpha'$ となる. b) T を2点からなるブール空間 $\{0, 1\}$ とする. $\varphi[X] \subsetneq Y$ なら, $\varphi[X] \subseteq u \subsetneq Y$ となる開閉集合 u があるから, $\beta(y)=1 \Longleftrightarrow y \in u$; $\beta'(y)=1$, $y \in Y$ によって β, β' を定義すれば, β, β' は Y から $\{0, 1\}$ への連続写像となり, $\beta \neq \beta'$ だが, $\beta \circ \varphi = \beta' \circ \varphi$ である. ブール代数に対しては, a), b) を双対性によりブール代数の圏の言葉に翻訳すると, **2** および自明なブール代数が, 上の S および T の役割りを果たすことが分かる.

4.2.2 $p \in St(B)$ に対し, $\varphi(p)=p \cap A$ である. a) ⇒ b) : b) が成り立たないとすれば, $b \in B$ で $\varphi[s_B(b)]$ が開集合とならないものがある. $a \in A$ を $b \leqslant a$ となるものとすれば, $\varphi[s_B(b)] \subseteq s_A(a)$ だから, 補題 4.1.1 c) により, $\varphi[s_B(b)] \subset u \subsetneq s_A(a)$ となる $St(A)$ の開閉集合 u があるが, $s_A(a')=u$ となる $a' \in A$ をとれば, $b \leqslant a' < a$ となる. b) ⇒ a) : $b \in B$ に対し, $\varphi[s_B(b)]$ は A の開閉集合となるから, $s_A(a)=\varphi[s_B(b)]$ となる $a \in A$ をとる. $b \leqslant a$ だが, $c \in A$ が $b \leqslant c$ を満たせば, $s_A(a)=\varphi[s_B(b)] \subseteq \varphi[s_B(c)]=s_A(c)$ だから, $a \leqslant c$ となり, a は $b \leqslant a$ となる最小の A の元であることが分かる.

4.3.1 B と U を演習問題 3.1.4 のようにとる. $|U|=|I|$ となるが, U は互いに独立だから, U から生成された B の部分ブール代数 F は, 補題 4.3.2 により, U 上自由となる.

4.3.2 補題 4.3.6 により, $P(\kappa)$ は濃度 2^κ の自由な部分ブール代数 F を持つが, $|B| \leqslant 2^\kappa$ により, 上射 $f: F \to B$ が存在する. B は完備だから, 定理 3.2.3 により, 準同型 $g: P(\kappa) \to B$ で $f \subseteq g$ となるものが存在する.

4.3.3 a) 補題 4.3.2 により, X_V は有限交叉性を持つから, $X_V \subseteq p$ となる F 上の超フィルターが存在する. $X_V \subseteq p, p'$ を2つの超フィルターとすれば, それらによってひき起こされる自然な写像 $\varphi_p: F \to F/p=\mathbf{2}$, $\varphi_{p'}: F \to F/p'=\mathbf{2}$ は U 上等しいから, $\varphi_p=\varphi_{p'}$ となり, $p=p'$ である. b) p を F 上の超フィルターとして, $V=\{u \in U | u \in p\}$ とすれば, $X_V \subseteq p$ となるから, 一意性により $p=p_V$ である. c) $p=p_V$, $q=p_{V'}$ とする. 写像 $f: U \to F$ を, $u \in V \triangle V'$ なら $f(u)=-u$, そうでなければ, $f(u)=u$ と定義する. U と $f[U]$ は共に F の自由生成系となるから, F の自己同型 g で $g \supseteq f$ となるものがある. $g[V]=V'$ だから, $g[p]=q$ である.

4.3.4 a) たとえば, B 上の演算 · がこのように定義できることは, $\vdash (\alpha \leftrightarrow \alpha') \wedge (\beta \leftrightarrow \beta') \to (\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha' \wedge \beta')$ により分かる. $\vdash \alpha \wedge \neg\alpha \leftrightarrow \beta \wedge \neg\beta$ が任意の $\alpha, \beta \in Fm$ に対して成り立つから, $0 \in B$ の定義は, $\alpha \in Fm$ によらない. 1に関しても同様である. B がブール代数になることは, たとえば, $\vdash \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ などにより分かる. b) $c, d \in P$ で $c \neq d$ なら $\nvdash c \leftrightarrow d$ だから, $h(c) \neq h(d)$ である. Fm は P から

∨, ∧, ７ によって生成されるから, B は $e[P]$ から生成される. $c_1,\cdots,c_n$ を互いに異なる P の元とすれば, $\nvdash c_1\wedge\cdots\wedge c_m\wedge 7c_{m+1}\wedge\cdots\wedge 7c_n\leftrightarrow\alpha\wedge 7\alpha$ だから, $e[P]$ は互いに独立である. したがって, 補題 4.3.2 により, B は自由である.

5.1.1 各 X_i は X の部分空間としてコンパクトだから, X は局所コンパクトである. $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} Clop(X_n)$ は, $\mathcal{O}$ の開閉集合からなる開基だから, X は0次元である. $Y=X\cup\{\infty\}$ として $(Y,\mathcal{O}')$ を $(X,\mathcal{O})$ の一点コンパクト化とすれば, $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} Clop(X_n)\cup\{Y\backslash u\mid u\in Clop(X_n), n\in\boldsymbol{N}\}$ は Y の開閉集合からなる準基だから, $(Y,\mathcal{O}')$ は0次元となり, ブール空間である. また, X は Y で稠密だから, $(Y,\mathcal{O}')$ は分散的である. 帰納法により, $Y_\alpha=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(X_n)_\alpha\cup\{\infty\}$ となることが示せるから, $\beta=\sup\{\alpha(X_n)|n\in\boldsymbol{N}\}$ として, $Y_\beta=\{\infty\}$ となる.

5.1.2 a) ⇒ b) は明らかである. b) ⇒ a): $u\subseteq X$ に対し x を u^h の孤立点とすれば, $\{x\}$ は x を含む u の開集合となり $\{x\}\cap u\neq\varnothing$ により $x\in u$ である.

5.1.3 順序数 α,β に対し, $o(\alpha,\beta)$ で $\alpha\times\beta$ を辞書式順序で考えたときの順序型を表わすことにする. A が超原子的なら, $a\in A$ に対し $o(\alpha(A\upharpoonright a), n(A\upharpoonright a))$ を対応させる関数は階数関数になる. 逆に A が階数関数 r を持つなら, 任意の $a\in A\backslash\{0\}$ に対して, $b\in A\backslash\{0\}$ を $0<b\leqslant a$ となるもののうちで最小の $r(b)$ を持つものとすれば, b は A の原子元となるから, A は原子的である. 更に, B を A の任意の部分ブール代数とするとき, $r\upharpoonright B$ は B 上の階数関数となるから, 上により, B は原子的である. したがって, 命題 5.1.3 により, B は超原子的であることが分かる.

5.2.1 可算ブール代数の全体のクラスの上の2項関係 R を, $A\,R\,B\Longleftrightarrow$($A$ と B は有限で同型) または (A と B は可算無限で $|At(A)|=|At(B)|<\omega$) または (A と B は可算無限で $|At(A)|=|At(B)|=\omega$ かつある $n\in\boldsymbol{N}$ に対し ($A\cong B\times\boldsymbol{2}^n$ または $B\cong A\times\boldsymbol{2}^n$) が成り立つ) と定義すれば, R はヴォート関係となり, $A\,R\,A\times\boldsymbol{2}$ となる.

5.2.2 a) C は $[0,1]$ の閉集合だから, コンパクト・ハウスドルフ空間である. $D=(\boldsymbol{R}\backslash C)\cap\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ で稠密だから, $\{[a,b]\cap C|a,b\in D,\ a<b\}$ は C の開閉集合からなる可算な開基となる. $a\in C$ とすると, C の定義から, 任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対し, $a+\frac{2}{3^n}$ または $a-\frac{2}{3^n}$ が再び C の元となるが, このことから, C は孤立点を持たないことが分かる. b) 上に述べたことと, 補題 4.1.1 a) により, $Clop(C)$ は無原子的可算無限ブール代数となるから, 定理 4.3.3 と系 5.2.3 により, $Clop(\boldsymbol{2}^{\boldsymbol{N}})$ と同型になる. したがって, 定理 4.1.3 により C と $\boldsymbol{2}^{\boldsymbol{N}}$ は位相同型である.

6.1.1 系 5.2.3 により, $Clop(\boldsymbol{2}^{\boldsymbol{N}})\cong Clop((\boldsymbol{2}^{\boldsymbol{N}})^{\boldsymbol{N}})$ だから, $\boldsymbol{2}^{\boldsymbol{N}}\cong(\boldsymbol{2}^{\boldsymbol{N}})^{\boldsymbol{N}}$ である. $X=(\boldsymbol{2}^{\boldsymbol{N}})^{\boldsymbol{N}}$ とする. $n,m\in\boldsymbol{N}$ に対し, $a_{nm}=\{x\in X|(x(n))(m)=1\}$ は X の開閉集合, したがって, 正則開集合となる. $f:\boldsymbol{N}\to 2,\ n\longmapsto 0$ として, $\sum_{m\in\boldsymbol{N}} a_{nm}=(\{x\in X|x(n)\neq$

$f\})^{ht}=1$ が $RO(X)$ で成り立つから，$\prod_{n\in N}\sum_{m\in N} a_{nm}=1$ である．一方，$e\in P_\omega(N)$ に対し，$s_{ne}=\{x\in X|$ ある $m\in e$ に対し $(x(n))(m)=1\}$ となるから，任意の $f\in F$ に対し，$\prod_{n\in N} s_{nf(n)}=(\{x\in X|$ すべての $n\in N$ に対し，$(x(n))(m)=1$ となる $m\in f(n)$ が存在する$\})^t=0$ となる．

6.1.2 $i\in I$ と $f\in F$ に対し，$s_{if(i)}\leqslant \sum_{j\in J} a_{ij}$ だから，すべての $f\in F$ に対し，$\prod_{i\in I} s_{if(i)}\leqslant \prod_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}$ が成り立つ．したがって，$\sum_{f\in F}\prod_{i\in I} s_{if(i)}\leqslant \prod_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}$ である．

6.1.3 $\sum_{f\in F(I,J)}\prod_{i\in I} a_{if(i)}\leqslant \sum_{f\in F}\prod_{i\in I} s_{if(i)}\leqslant \prod_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}$ だから，$\sum_{f\in F(I,J)}\prod_{i\in I} a_{if(i)}=\prod_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}$ なら，$\sum_{f\in F}\prod_{i\in I} s_{if(i)}=\prod_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}$ となる．

6.1.4 そうでなければ，$\mu<\kappa$ と集合 J および A の元 $a_{\alpha j}$，$\alpha<\mu$，$j\in J$ が存在して，$a=\prod_{\alpha<\mu}\sum_{j\in J} a_{\alpha j}\cdot -\sum_{f\in F(\mu,J)}\prod_{\alpha<\mu} a_{\alpha f(\alpha)}>0$ となる．このとき，P の元の下降列 $(p_\alpha)_{\alpha<\mu}$ と写像 $f:\mu\to J$ で，$p_0\leqslant a$，$p_\alpha\leqslant a_{\alpha f(\alpha)}$ となるものが帰納的に構成できる：p_0 は $p_0\leqslant a$ となる任意の P の元とする．P は A で稠密だから，これは可能である．$\beta<\mu$ として，すべての $\alpha<\beta$ に対し，p_α, $f(\alpha)$ が上の条件を満たすように構成されたとき，$p\in P$ を $\{p_\alpha|\alpha<\beta\}$ の下界の 1 つとする．$0<p\leqslant a\leqslant \sum_{j\in J} a_{\beta j}$ だから，$j\in J$ で $p\cdot a_{\beta j}>0$ となるものがある．$p_\beta\in P$ を $p_\beta\leqslant p\cdot a_{\beta j}$ となるようにとり，$f(\beta)=j$ と定義すればよい．$q\in P$ を $\{p_\alpha|\alpha<\mu\}$ の下界とすると，$q\leqslant a$ で $q\leqslant \prod_{\alpha<\mu} a_{\alpha f(\alpha)}$ だから，$q=0$ となるが，これは $0\notin P$ に矛盾する．

6.2.1 $\alpha<\kappa^+$ に対し，B の部分ブール代数 A_α を，$A_0=[X]$，$A_\alpha=[\{\sum^B Y \mid Y\subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta,\ |Y|\leqslant\kappa\}]$ で帰納的に定義する．α に関する帰納法で $A\supseteq A_\alpha$ が示せるから，$A\supseteq \bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha$ だが，$\bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha$ は，B の κ-完備な部分ブール代数となるから，$A=\bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha$ である．更に，$|A_\alpha|\leqslant|X|^\kappa$，$\alpha<\kappa^+$ が帰納法により示せるから，$|A|=|\bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha|\leqslant|X|^\kappa\cdot\kappa^+=|X|^\kappa$ である．

6.2.2 集合 S と，各 $s\in S$ に対し，κ-完備ブール代数 A_s およびその部分集合 $\{x_{si}|i\in I\}$ を；(1) A_s は $\{x_{si}|i\in I\}$ から κ-完備に生成される．(2) B が B の部分集合 $\{v_i|i\in I\}$ から κ-完備に生成された κ-完備ブール代数なら，ある $s\in S$ に対し，同型写像 $\varphi:A_s\to B$ で $\varphi(x_{si})=v_i$ となるものがある；を満たすものとする．$u_i=(x_{si})_{s\in S}$ として，F を $\{u_i|i\in I\}$ から κ-完備に生成された $\prod_{s\in S} A_s$ の部分ブール代数とする．B が任意の κ-完備ブール代数で，$f:\{u_i|i\in I\}\to B$ とするとき，B' を $f[\{u_i|i\in I\}]$ から κ-完備に生成された B の部分ブール代数とすれば，(2)により $s'\in S$ と同型写像 $\varphi:A_{s'}\to B'$ で，$\varphi(u_{s'i})=f(u_i)$ となるものがある．$p_{s'}$ を $\prod_{s\in S} A_s$ の $A_{s'}$ への射影とすれば，$g=\varphi\circ p_{s'}\upharpoonright F$ は $f\subseteq g$ を満たす F から B への κ-完備な準同型写像となる．

6.2.3 $RO(X)$ が $\aleph_1$-表現可能だとすれば，命題 6.1.1 により，任意の添数集合 I, J，$|I|=\aleph_0$, $|J|=\aleph_0$ と $RO(X)$ の元 b_{ij}, $i\in I$, $j\in J$ に対し，$\prod_{i\in I}\sum_{j\in J} b_{ij}=\sum_{f\in F(I,J)}$

$\prod_{i\in I} b_{if(i)} \leqslant \sum_{j\in J} \sum_{i,i'\in I, i\neq i'} b_{ij}\cdot b_{i'j}$ が成り立たなければならないが，$a_{ij}=\{x\in X \mid x(j)=i\}$ とすれば，$\prod_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}=1$, $\sum_{j\in J}\sum_{i,i'\in I, i\neq i'} a_{ij}\cdot a_{i'j}=0$ である．

7.1.1 A 上の超フィルターは，$p_\infty=\{(a_i)_{i\in I}\in A \mid |\{i\in I \mid a_i\neq 1\}|<\omega\}$ であるか，または，$i'\in I$ と $A_{i'}$ 上の超フィルター p が一意に決まって $\bar{p}=\{(a_i)_{i\in I}\in A \mid a_{i'}\in p_{i'}\}$ と表わされる．$f: X\to St(A)\setminus\{p_\infty\}$, $p\longmapsto\bar{p}$ は位相同型写像となる．

7.1.2 $RO(\kappa^\omega)$ の細分 Q_n, $n\in N$ を $Q_n=\{\{x\in\kappa^\omega \mid x\restriction\{0,\cdots,n-1\}=f\} \mid f:\{0,\cdots,n-1\}\to\kappa\}$ と定義すれば Q_n, $n\in N$ は（1）〜（4）を満たす．したがって，$\bigcup_{n\in N} P_n$ から $\bigcup_{n\in N} Q_n$ への順序同型 f が存在する．$[\bigcup_{n\in N} P_n]=\{\sum U_1+\cdots+\sum U_n \mid n\in N,\ U_i\subseteq P_i,\ \sum U_i,\ i=1,\cdots,n$ は互いに素$\}$ となり，$[\bigcup_{n\in N} Q_n]$ についても同様の等式が成り立つから，f は同型写像 $f':[\bigcup_{n\in N} P_n]\to[\bigcup_{n\in N} Q_n]$ に拡張できる．更に，定理 3.2.3 により，f' は準同型 $g: A\to RO(\kappa^\omega)$ に拡張できるが，$\bigcup_{n\in N} P_n$ と $\bigcup_{n\in N} Q_n$ がそれぞれ A と $RO(\kappa^\omega)$ で稠密であることから，g は同型写像となることが分かる．

7.2.1 $x\in B_i\cap B_j\setminus\{0,1\}$ があれば，$x\in B_i\setminus\{0\}$, $-x\in B_j\setminus\{0\}$ で $x\cdot -x=0$ となるから，B_i と B_j は独立でない．A, B をブール代数として，$p\in St(A)$, $q\in St(B)$ とする．単射 $f: A\to A\times B$; $g: B\to A\times B$ を，$a\in p$ なら $f(a)=(a,1_B)$, $a\notin p$ なら $f(a)=(a,0_B)$; $b\in q$ なら $g(b)=(1_A,b)$, $b\notin q$ なら $g(b)=(0_A,b)$ で定義すれば，$f[A]\cap g[B]=\{0,1\}$ だが，$a\in A\setminus p$, $b\in B\setminus q$ に対し，$f(a)\cdot g(b)=0$ となる．

7.2.2 双対空間に移して考えれば，一番目の式は，位相空間の直積と直和に関する分配則となる．二番目の式は一番目の式と $A\oplus\mathbf{2}=A$ により出る．

7.2.3 命題 7.2.1 により，自然な埋込み $i_A: A\to A\oplus B$ に双対な連続写像は射影 $p_A: St(A)\times St(B)\to St(A)$ となるが，p_A は開写像だから，演習問題 4.2.2 により，i_A は完備である．$i_B: B\to A\oplus B$ についても同様である．

7.2.4 補題 2.3.2 により，$\{a_n \mid n\in N\}$ と $\{b_n \mid n\in N\}$ をそれぞれ A と B の互いに素な部分集合とする．このとき，$\{a_n\cdot b_n \mid n\in N\}$ は上限を持たない：$c\in A\oplus B$ を $\{a_n\cdot b_n \mid n\in N\}$ の上界とする．$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in A$, $\beta_1,\cdots,\beta_m\in B$ で，$c=\alpha_1\cdot\beta_1+\cdots+\alpha_m\cdot\beta_m$ となるものをとる．一般性を失うことなく $\{n\in N \mid \alpha_1\cdot\beta_1\cdot a_n\cdot b_n>0\}$ は無限集合としてよいが，k, l をこの集合の異なる元とすれば，$c\cdot -(a_k\cdot b_l)$ は c より真に小さい $\{a_n\cdot b_n \mid n\in N\}$ の上界になっている．

7.3.1 $\mathcal{O}_i$ を X_i の位相として，$p_i: X_1\times\cdots\times X_n\to X_i$ を i 成分への射影とする．$c(X_1\times\cdots\times X_n)>2^\kappa$ なら，$U\subseteq\mathcal{O}_1\times\cdots\times\mathcal{O}_n\setminus\{\emptyset\}$ で，$|U|>2^\kappa$ となる互いに素な開集合の族 U が存在する．$\{u,v\}\in[U]^2$ に対し．$i\in\{1,\cdots,n\}$ で $p_i(u)$ と $p_i(v)$ が互いに素になるものがあるから，f を $\{u,v\}\in[U]^2$ にそのような $i\in\{1,\cdots,n\}$ の1つを対応させる写像とすれば，エルデシュ・ラドーの定理により，f-一様な $X\subseteq U$ で $|X|>\kappa$ となるものがある．$f[[X]^2]=\{j\}$ とすれば，$Y=\{p_j[u] \mid u\in X\}$ は X_i の互いに素な開

集合の族となり，$|Y|>\kappa$ だから $c(X_i)\leqslant\kappa$ に矛盾する．

7.3.2 $D\subseteq P(X)$ を互いに素とすると，D の元 Y に対し $x\in Y$ となる $x\in X$ の1つを対応させる写像は1対1となるから，D は可算である．$X=\boldsymbol{Q}$ としてよいが，$\{\{q\in\boldsymbol{Q}|q\leqslant r\}|\ r\in\boldsymbol{R}\}$ は $P(X)$ の濃度 $2^{\aleph_0}$ の連鎖となる．

7.3.3 $u\subseteq X$ に対し，その直径を $\mathrm{diam}(u)=\max\{d(x,y)|x,y\in u\}$ で定義する．1の分割の族 P_n, $n\in\boldsymbol{N}$ で演習問題 7.1.2 の条件（1），（2），（3）および：(4′) すべての $u\in P_n$ に対し，$\mathrm{diam}(u)\leqslant\dfrac{1}{n+1}$；を満たすようなものが帰納的に構成できるが，このとき，(4′) により，$\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}P_n$ は B で稠密となる．

7.3.4 一様なブール代数は同型でなければ完全に異なるから，H の直積分解 $\prod_{i\in I}H_i^{\kappa(i)}$ で H_i, $i\in I$ は互いに完全に異なるようなものがある．H_i の分割 P で $\kappa\leqslant|P|$ となるものがあれば，$H_i^{\kappa}\cong H_i$ となるから，$\kappa(i)=1$ または H_i の任意の分割 P に対し $\kappa(i)>|P|$ とできる．$\prod_{i\in I}H_i^{\kappa(i)}$, $\prod_{j\in J}H_j^{\lambda(j)}$ を H の上のような直積分解とすれば，各 $i\in I$ に対し $a\in H$ で $H\restriction a\cong H_i$ となるものがあるから，$j\in J$ で $H_j\cong H_i$ となるものが一意に存在し，逆も成り立つ．したがって，一般性を失うことなく $I=J$ と考えてよい．$i\in I$ に対し $a\in H$ で $H\restriction a\cong H_i^{\kappa(i)}$ となるものがあるから，$\kappa(i)\leqslant\lambda(i)$ である．同様に $\lambda(i)\leqslant\kappa(i)$ も成り立つから，$\kappa(i)=\lambda(i)$ である．なお，例 9.4.1 を参照されたい．

9.1.1 b_n, $n\in\boldsymbol{N}$ を $b_0=a_0$, $b_{n+1}=a_{n+1}\cdot-(a_0+\cdots+a_n)$ とすれば，b_n, $n\in\boldsymbol{N}$ は互いに素で，$m\in\boldsymbol{N}$ に対し，$\sum_{n\leqslant m}b_n=\sum_{n\leqslant m}a_n$ となる．したがって，$\sum_{n\in\boldsymbol{N}}a_n=\sum_{n\in\boldsymbol{N}}b_n$ となり，$\mu(\sum_{n\in\boldsymbol{N}}a_n)=\mu(\sum_{n\in\boldsymbol{N}}b_n)=\sum_{n\in\boldsymbol{N}}\mu(b_n)$ となるから，十分に大きな $N\in\boldsymbol{N}$ に対し，$\mu(\sum_{n\in\boldsymbol{N}}a_n)-\mu(\sum_{n\leqslant N}a_n)=\sum_{n\in\boldsymbol{N}}\mu(b_n)-\sum_{n\leqslant N}\mu(b_n)<\varepsilon$ となる．

9.1.2 そうでないとすれば，演習問題 6.1.2 により，B の元 a_{ij}, $i,j\in\boldsymbol{N}$ で，$0<a=\prod_{i\in\boldsymbol{N}}\sum_{j\in\boldsymbol{N}}a_{ij}\cdot-\sum_{f\in F}\prod_{i\in\boldsymbol{N}}s_{if(i)}$ となるものがある．$\varepsilon=\mu(a)$ として $\varepsilon>0$ となるが，演習問題 9.1.1 により，各 $i\in\boldsymbol{N}$ に対し，$N(i)\in\boldsymbol{N}$ で $\mu(\sum_{j\in\boldsymbol{N}}a_{ij})-\mu(\sum_{j\leqslant N(i)}a_{ij})\leqslant\varepsilon/2^{i+1}$ となるものがある．$g:\boldsymbol{N}\to P_\omega(\boldsymbol{N})$, $i\longmapsto\{0,1,\cdots,N(i)\}$ とすれば，$a\leqslant\prod_{i\in\boldsymbol{N}}\sum_{j\in\boldsymbol{N}}a_{ij}\cdot-\prod_{k\in\boldsymbol{N}}s_{kg(k)}=\sum_{k\in\boldsymbol{N}}(\prod_{i\in\boldsymbol{N}}\sum_{j\in\boldsymbol{N}}a_{ij}\cdot-s_{kg(k)})\leqslant\sum_{k\in\boldsymbol{N}}(\sum_{j\in\boldsymbol{N}}a_{kj}\cdot-s_{kg(k)})$ となるから，$\mu(a)\leqslant\sum_{k\in\boldsymbol{N}}\mu(\sum_{j\in\boldsymbol{N}}a_{kj}\cdot-s_{kg(k)})\leqslant\sum_{k\in\boldsymbol{N}}\varepsilon/2^{k+1}=\varepsilon/2$ となり矛盾である．

9.1.3 まず，$\mu(b)=r$ なら任意の $0<\varepsilon<r$ に対し $\mu(d)\leqslant\varepsilon$ となる $0<d<b$ が存在することを示す．B は無原子的だから，互いに素な $B\backslash\{0\}$ の元 $b_i, i\in\boldsymbol{N}$ で $b_i\leqslant b$ となるものがある．$\sum_{i\in I}b_i\leqslant b$ だから，$\sum_{i\in I}\mu(b_i)\leqslant\mu(b)$ となり，$i\in\boldsymbol{N}$ で $\mu(b_i)\leqslant\varepsilon$ となるものがある．さて，$\mu(b)=r$ で $0\leqslant s<r$ とする．$s=0$ なら，$c=0$ とすればよいから，$0<s$ とする．$B\backslash\{0\}$ の元の上昇列 $(b_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ で $b_\alpha\leqslant b$, $\mu(b_\alpha)\leqslant s$ となるものを帰納的に以下のように定義する：b_0 は $b_0<b$ で $\mu(b_0)\leqslant s$ となる任意の $B\backslash\{0\}$ の元とす

る．$b_\beta, \beta<\alpha$ が既に構成されたとき，α が極限順序数なら，$b_\alpha=\sum_{\beta<\alpha} b_\beta$ とする．$\alpha=\gamma+1$ で $\mu(b_\gamma)=s$ なら，$b_\alpha=b_\gamma$ と置き，$\mu(b_\gamma)<s$ なら，$0<b'\leqslant b\cdot -b_\gamma$ を $\mu(b')\leqslant s-\mu(b_\gamma)$ となるようにとり，$b_\alpha=b_\gamma+b'$ とする．$c=\sum_{\alpha<\omega_1} b_\alpha$ とすれば，$c\leqslant b$ で $\mu(c)\leqslant s$ だが，実数の真の上昇列で順序型 ω_1 を持つものが存在しないことから，$\mu(c)=s$ が分かる．

9.1.4 B のすべての元 b は，ある $X\subseteq\{1,\cdots,n\}$ によって $b=\dot{\sum_{i\in X}} b_i$ と一意に表わせるから，$\mu(b)=\sum_{i\in X} w_i$ と定義すれば，μ は B 上の測度となり，$\mu(b_i)=w_i$ を満たす．

9.1.5 すべての F の元は，$\dot{\sum_{1\leqslant i\leqslant N}} \varepsilon_{i1}\cdot u_{i1}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{in(i)}\cdot u_{in(i)}$ という形に表わせる．ここに，$N, n(i)\in\boldsymbol{N}$，$\varepsilon_{ij}\in\{-1,+1\}$，$u_{ij}\in U$ で，$1\leqslant i\leqslant N$ に対し $u_{i1},\cdots,u_{in(i)}$ は互いに異なるものとする．また，$n(i)=0$ のときには $\varepsilon_{i1}\cdot u_{i1}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{in(i)}\cdot u_{in(i)}=1$ と定義する．

（＊）$\mu(\dot{\sum_{1\leqslant i\leqslant N}}\varepsilon_{i1}\cdot u_{i1}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_{in(i)}\cdot u_{in(i)})=\sum_{1\leqslant i\leqslant N} 1/2^{i(n)}$

として，この定義が，F の元の上の表現の選び方に依存しないことが示せれば，μ が F 上のハール測度となることが分かるが，これは，たとえば，$u_1,\cdots,u_{n+1}$ を U の異なる元として，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\in\{-1,+1\}$ とするとき，$\varepsilon_1\cdot u_1\cdot\cdots\cdot\varepsilon_n\cdot u_n=\varepsilon_1\cdot u_1\cdot\cdots\cdot\varepsilon_n\cdot u_n\cdot u_{n+1}\dot{+}\varepsilon_1\cdot u_1\cdot\cdots\cdot\varepsilon_n\cdot u_n\cdot -u_{n+1}$ で $\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}$ となることから分かる．逆に，F 上のハール測度が（＊）を満たすことは明らかだから，一意性が成り立つ．

9.2.1 a) U が独立であることは明らかだが，$n\in\boldsymbol{N}$，$\varepsilon_i\in\{-1,+1\}$，$1\leqslant i\leqslant n$ また $k:\{1,\cdots,n\}\to\boldsymbol{N}$ を真の増加関数として，n に関する帰納法により，$\mu(\varepsilon_1\cdot u_{k(1)}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_n u_{k(n)})=\frac{1}{2^n}$ が証明できる．b) $d\in F$ で $d>0$ なら．$\lambda\restriction F$ がハール測度であることから $\lambda(d)>0$ である．c) 任意の $b\in B$ と $\varepsilon>0$ に対し，$\pi(b)=\beta$ として，$\alpha\in e[F]$ で $\nu(\beta\triangle\alpha)\leqslant\varepsilon$ となるものが存在することを示せばよい．測度論により，開集合 $u\subseteq[0,1]$ で $b\subseteq u$，$\mu(u)-\mu(b)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ となるものがある．u は可算個の互いに素な開区間の和 $u=\bigcup_{n<N} v_n$，$(N\leqslant\omega)$ となっているが，十分に大きな $M<\omega$ をとって，$\mu(u)-\mu(v_1\cup\cdots\cup v_M)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ とすることができる．$\{[a,b)\mid a,b\in\{2k/2^n\mid k,n\in\boldsymbol{N}\}\}$ が示せるが，$\{2k/2^n\mid k,n\in\boldsymbol{N}\}$ は $[0,1]$ で稠密だから，$1\leqslant i\leqslant N$ に対し，$a_i\in F$ で $a_i\subseteq v_i$，$\mu(v_i)-\mu(a_i)\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}$ となるものがとれる．$a=a_1\cup\cdots\cup a_n$ とすれば，$a\in F$ で $\alpha=F(a)$ として，$\nu(\beta\triangle\alpha)\leqslant\varepsilon$ が成り立つ．

9.3.1 $At(A)=\{a_1,\cdots,a_m\}$ とする．$a_1\dot{+}\cdots\dot{+}a_m=1$ である．演習問題 9.1.3 により，$N=2^n$ として $a_{ij}\in B$，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant N$ で，$a_i=\dot{\sum_{1\leqslant j\leqslant N}} a_{ij}$，$\mu(a_{ij})=\frac{1}{N}\mu(a_i)$，また，$a_{ij}\cdot b>0$ かつ $a_{ij}\cdot -b>0$ なら，$j=1$ となるようなものがとれる．C を，$\{\sum_{1\leqslant i\leqslant m} a_{ij}\mid 1\leqslant j\leqslant N\}$ から生成された B の部分ブール代数とすればよい．

9.3.2 $|X|=\omega$ で，μ からひき起こされる距離 d に関し B で稠密であるような $X\subseteq B$ をとる．$(b_n)_{n\in\omega}$ を，$X=\{b_n\mid n\in\omega\}$ で，すべての $x\in X$ に対し，$|\{n\in\omega\mid b_n=x\}|=\omega$

となるものとする．命題 9.3.3 により，B の部分ブール代数 $C_n, n \in \boldsymbol{N}$ を帰納的に以下のように定義できる： $C_0=\{0,1\}$ とし，C_{n+1} を B の部分ブール代数で，（a） $m=2^{n+1}$ として，$|C_{n+1}|=2^m$ で，u が C_{n+1} の原子元なら $\mu(u)=1/2^{n+1}$，（b） C_{n+1} と $[C_0 \cup \cdots \cup C_n]$ は μ-独立，（c） $d(b_n, [C_0 \cup \cdots \cup C_n \cup C_{n+1}]) \leqslant 1/2^{n+1}$ となるものとする．$F=[\bigcup_{n \in \omega} C_n]$ とすれば，F は濃度 ω の自由ブール代数となり，$\mu \restriction F$ は F のハール測度となる．また，$\bigcup_{n \in \omega} C_n$ は（c）と b_n の定義により，μ からひき起こされる距離に関し，B で稠密となるから，(B, μ) は (M_ω, ν_ω) と同型になることが分かる．

9.4.1 ブール代数 A に対し $Aut(A)$ で A 上の自己同型写像の全体の集合を表わすことにする． a) $x \in C(B \restriction c)$ とする．$g \in Aut(B)$ なら，$c \in C(B)$ により，$g \restriction B \restriction c \in Aut(B \restriction c)$ だから，$g(x)=g \restriction B \restriction c(x)=x$ となる．したがって，$x \in C(B)$ である．逆に，$x \in C(B) \restriction c$ とする．このとき，$g \in Aut(B \restriction c)$ なら，$\bar{g}: B \to B,\ a \mapsto g(a \cdot c)+a \cdot -c$ として，$\bar{g} \in Aut(B)$ で $g \subseteq \bar{g}$ だから，$g(x)=\bar{g}(x)=x$ となる．したがって，$x \in C(B \restriction c)$ である． b) $B \restriction x$ と $B \restriction -x$ が完全に異ならなければ，$0<a \leqslant x$，$0<b \leqslant -x$ で $B \restriction a \cong B \restriction b$ となるものがある．f を $B \restriction a$ から $B \restriction b$ への同型写像として，$g: B \to B,\ c \longmapsto f(c \cdot a)+f^{-1}(c \cdot b)+c \cdot -a \cdot -b$ とすれば $g \in Aut(B)$ で，$g(x)=f(x \cdot a)+x \cdot -a \neq x$ だから，$x \notin C(B)$ となる．逆に，$x \notin C(B)$ なら，$g \in Aut(B)$ で $g(x) \neq x$ となるものがあるが，一般性を失うことなく，$a=x \cdot -g(x)>0$ としてよい．$B \restriction a \cong B \restriction f^{-1}(a)$ だが，$a \leqslant x$，$f^{-1}(a) \leqslant -x$ である． c) $B=\prod_{i \in I} B_i$ とする．$f \in Aut(B)$ とするとき，$B_i, i \in I$ が互いに完全に異なることから，f は $\prod_{i \in I} B_i$ の i 成分を i 成分に移すことが分かる．したがって，$f=(f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Aut(B_i)$ となっている．よって，$(x_i)_{i \in I} \in C(B) \Longleftrightarrow$ すべての $g(g_i)_{i \in I} \in \prod Aut(B_i)$ に対し，$g_i(x_i)=x_i \Longleftrightarrow (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} C(B_i)$ である． d) b) により，B が弱一様なら，$C(B)=\boldsymbol{2}$ となる．B が弱一様でないなら，$x, y \in B \setminus \{0\}$ で $B \restriction x$ と $B \restriction y$ が完全に異なるようなものがある．$c=\sum^B \{g(x) | g \in Aut(B)\}$，$d=\sum^B \{g(y) | g \in Aut(B)\}$ とすれば，$0<c$ だが，$0<d$ で $c \cdot d=0$ だから，$c<1$ である．また，任意の $f \in Aut(B)$ に対し，$f(c)=f(\sum^B \{g(x) | g \in Aut(B)\})=\sum^B \{f \circ g(x) | g \in Aut(B)\}=c$ となるから，$c \in C(B)$ で，$|C(B)| \geqslant 4$ となる． e) $B \cong D \times E$ で，D は一様な因子の直積，また，E は自明でない一様な直積因子を持たないようなブール代数であるとする．このとき，D と E は完全に異なる．$C(E)$ は無原子的である．そうでなければ，c を $C(E)$ の原子元として，a) により，$C(E \restriction c)=C(E) \restriction c \cong \boldsymbol{2}$ となるから，d) により，$E \restriction c$ は弱一様になる．したがって，定理 9.4.3 により，$E \restriction c$ は一様な因子の直積となるが，これは E の定義に矛盾する．したがって，$C(B)$ が原子的なら，$C(E)=0$ となるから，$E=0$ である．一方，B が一様な因子の直積となっていれば，B は弱一様だから，d) により，$C(B)=\boldsymbol{2}$ となる．

参 考 文 献

集合論に関するもの：

[1] Th. Jech: Set Theory, Academic Press, New York - San Francisco - London, 1978.

[2] K. Kunen: Set Theory, North - Holland, Amsterdam - New York - Oxford, 1980.

[3] 難波完爾：集合論，サイエンス社，1977.

位相空間論に関するもの：

[4] Engelking: General Topology, PWN Polish Scientific Publischers, Warszawa, 1977.

[5] J.L. Kelley: General Topology, v. Nostrand Company, Princeton-Toronto-London - New York, 1955.

[6] 河田敬義，三村征雄：現代数学概説 II，岩波書店，1965.

束論に関するもの：

[7] G. Grätzer: General Lattice Theory, Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1978.

ブール代数に関するもの：

[8] Ph. Dwinger: Introduction to Boolean algebras, 2nd ed., Physica-Verlag, Würzburg, 1971.

[9] P.R. Halmos: Lectures on Boolean algebras, v. Nostrand Company, Princeton-Toronto-London-New York, 1963.

[10] D. Ponasse, J.-C. Carrega: Algèbre et Topologie Booléenes, Masson S.A., Paris - New York - Bercelona - Milano, 1979.

[11] R. Sikorski: Boolean algebras, 2nd ed., Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg - New York, 1964.

[12] D.A. Vladimirov: Boolesche Algebren, Akademie-Verlag, Barlin, 1972（原典はロシア語）.

（訳註：文献［3］，［6］は訳者の選んだもの．本書で必要となる集合論および位相空間論の基礎知識は，ほとんどすべてこの二冊で学べると思う．なお，翻訳にあたっては，訳語は，なるべく

[13] 日本数学会編集：数学辞典，第2版，岩波書店，1968.

に従うよう心がけた．なお，本書を訳出した後，次の本の存在を知った：

[14] 田中尚夫：公理的集合論，培風館，1982.

集合論の初歩的な部分について，ていねいに説明してあるので，[3] がとりつきにくいと感じる読者はこれを読むとよいだろう.)

なお，本書よりさらに進んでブール代数について勉強したいと思う読者には，近刊予定 (1986 年2月現在) の

[15] S. Koppelberg, J.D. Monk 編 : Handbook of Boolean Algebras, North-Holland Publishing Company.

が参考になるだろう.

次に，各章に関連した文献を挙げよう：

第2章：

A.M. Gleason: Projective topological spaces, Ill. J. Math. 2 (1958), 482～489.

V. Glivenko: Sur quelques points de la logique de Brouwer, Bull. Acad. Sci. Belg. (1929), 183～188.

H. MacNeile: Partially ordered sets, Trans. Amer. Math. Soc. 42 (1937), 416～460.

M.H. Stone: The theory of representations for Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 37～111.

第3章：

R. Sikorski: A theorem on extentions of homomorphismus, Ann. Soc. Pol. Math. 21 (1948), 332～335.

R. Sikorski: On an analogy between measures and homomorphisms, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), 1～20.

第4章：

M.H. Stone: 第2章の文献で挙げたもの

M.H. Stone: Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 321～364.

第5章：

G.W. Day: Superatomic Boolean algebras, Pacific J. Math. 23 (1967), 479～489.

W. Hanf: On some fundamental problems concerning isomorphism of Boolean algebras, Math. Scand. 5 (1957), 205～217.

W. Hanf: Primitive Boolean algebras, Proc. Sympos. Pure. Math. 25 (1974), A.M.S., Providence, R.I. 1974, 75～90.

J. Ketonen: The Structure of countable Boolean algebras, Ann. Math. 108 (1978), 41～89.

R. LaGrange: Concerning the cardinal sequence of a Boolean algebra, Algebra

Universalis 7 (1977), 307～312.

R.D. Mayer, R.S. Pierce: Boolean algebras with ordered bases, Pacific J. Math 10 (1960), 925～942.

A. Mostowski, A. Tarski: Boolesche Ringe mit geordneter Basis, Fund. Math. 32 (1939), 69～86.

R.S. Pierce: Existence and uniqueness for theorems extentions of zero-dimentional compact metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 148 (1970), 1～21.

J. Roitman: Height and width of superatomic Boolean algebras, to appear

第6章：

C.C. Chang: On the representation of α-complete Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 208～218.

H. Gaifman: Infinite Boolean polynomials I, Fund. Math. 54 (1964), 16～25.

A.W. Hales: On the non-existence of free complete Boolean algebras, Fund. Math. 54 (1964), 45～66.

C.R. Karp: A note on the representation of α-complete Boolean algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 705～707.

L.H. Loomis: On the representation of σ-complete Boolean algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 757～760.

R.S. Pierce: Representation theorems for certain Boolean algebras, Proc. Am. Math. Soc. 10 (1959), 42～50.

R.S. Pierce: Distributivity in Boolean algebras, Pacific J. Math. 7 (1957), 983～992.

D. Scott: The independence of certain distributive laws in Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 84 (1957), 258～261.

D. Scott: A new characterization of α-representable Boolean algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955), 522～523.

R. Sikorski: On the representation of Boolean algebras as fiels of sets, Fund. Math. 35 (1948), 247～256.

E.C. Smith, A. Tarski: Higher degrees of distributivity and compactness in Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 84 (1957), 230～257.

R.M. Solovay: New proof of a theorem of Gaifman and Hales, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 282～284.

第7章：

W.W. Comfort, S. Negrepontis: Chain Conditions in Topology, Cambridge

University Press, 1982.

P. Erdös, A. Tarski: On families of mutually exclusive sets, Ann. Math. 44 (1953), 315～329.

R. S. Pierce: A note on complete Boolean algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 892～896.

R. Sikorski: Cartesian products of Boolean algebras, Fund. Math. 37 (1950), 125～136.

第8章：

B. Balcar, F. Franek: Independent families in complete Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), 607～618.

B. Balcar, P. Vojtáš: Refining systems on Boolean algebras, Lecture Notes in Mathematics 619 (1977), 45～68.

第9章：

H. Gaifman: Concerning measures on Boolean algebras, Pacific J. Math. 14 (1964), 61～73.

A. Horn, A. Tarski: Measures in Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 467～497.

J.L. Kelley: Measures on Boolean algebras, Pacific J. Math. 9 (1959), 1165～1177.

S. Koppelberg: A lattice structure on the isomorphism types of complete Boolean algebras, Lecture Notes in Mathematics 872 (1981), 98～126.

D. Maharam: On homogeneous measure algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. 28 (1942), 108～111.

D. Maharam: An algebraic characterization of measure algebras, Ann. Math. 48 (1947), 154～167.

索　　引

ア　行

カ　行

サ　行

タ 行

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

記 号 表

著者略歴

Sabine Koppelberg (ザビーネ・コッペルベルク)

1969 年　ハノーバー工科大学にて学位取得
1970 年〜1975 年　キール大学助手，ボン大学助手，ドイツ学術協会奨学生
1974 年　ボン大学にて大学教授資格獲得
現　在　ベルリン自由大学 (Freie Universität Berlin) 教授

監訳者略歴

廣瀬　健 (ひろせ　けん)

1963 年　立教大学大学院理学研究科修士課程修了
現　在　早稲田大学教授・理学博士

訳者略歴

渕野　昌 (ふちの　さかえ)

1977 年　早稲田大学理工学部化学科卒業
1979 年　早稲田大学理工学部数学科卒業
1979 年　早稲田大学大学院理工学研究科に入学，同年より，ベルリン自由大学に留学
1984 年　ハノーバー大学数学科助手
現　在　ベルリン自由大学数学科助手 (wissenschaftlicher Mitarbeiter)

現代のブール代数

定価 2500 円
1986 年 6 月 20 日　初版 1 刷発行

著　者　Sabine Koppelberg
監訳者　廣瀬　健
訳　者　渕野　昌

発　行　**共立出版株式会社**／南條正男
東京都文京区小日向 4—6—19
電話 東京 (03) 947 局 2511 番 (代表)
郵便番号 112／振替口座 東京 1-57035 番

印　刷　共立印刷
製　本　中條製本

社団法人
自然科学書協会
会員

検印廃止
NDC 411.73
ISBN 4-320-01348-4
Printed in Japan